

空间向量的应用习题

一、异面直线所成角

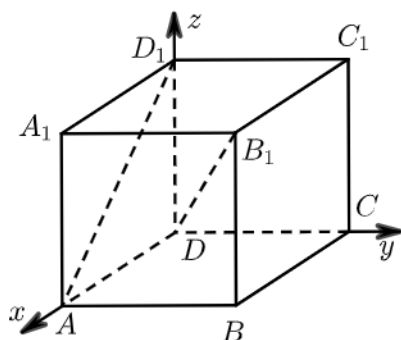
1 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 1$, $AA_1 = \sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 () .

A. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案 C

解析 方法一：如图建系：故

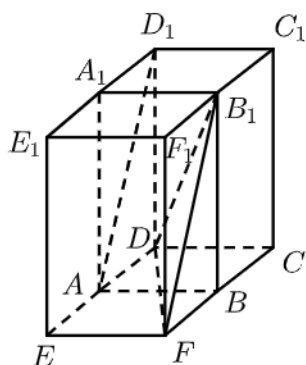


$$\overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, \sqrt{3}) ,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB_1} \rangle \\ &= \frac{-1 \times 1 + 0 \times 1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2 + 0 + (\sqrt{3})^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} . \end{aligned}$$

方法二：如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的一侧补上一个相同的长方体

$EFBA - E_1F_1B_1A_1$,



连接 B_1F ，由长方体性质可知， $B_1F \parallel AD_1$ ，所以 $\angle DB_1F$ 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角或其补角，

连接 DF ，由题意，得 $DF = \sqrt{1^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$ ，

$FB_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ， $DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}$ ，

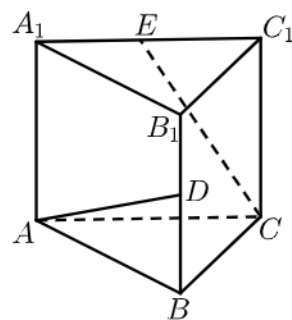
在 $\triangle DFB_1$ 中，由余弦定理，得 $DF^2 = FB_1^2 + DB_1^2 - 2FB_1 \cdot DB_1 \cdot \cos \angle DB_1F$ ，

即 $5 = 4 + 5 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} \times \cos \angle DB_1F$ ，

$\therefore \cos \angle DB_1F = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

故选 C。

- 2 如图，在所有棱长均为 a 的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 、 E 分别为 BB_1 、 A_1C_1 的中点，则异面直线 AD 、 CE 所成角的余弦值为（ ）。

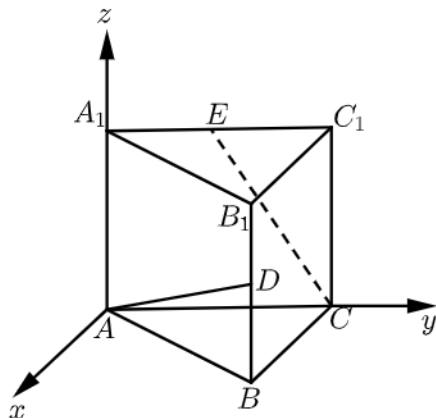


- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

答案 C

解析 在所有棱长均为 a 的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 、 E 分别为 BB_1 、 A_1C_1 的中点，以 A 为原点，在平面 ABC 中过 A 作 AC 的垂线为 x 轴， AC 为 y 轴，

AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



$$A(0,0,0), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), C(0,a,0), E\left(0, \frac{a}{2}, a\right),$$

$$\vec{AD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \vec{CE} = \left(0, -\frac{a}{2}, a\right),$$

设异面直线 AD 、 CE 所成角为 θ ，

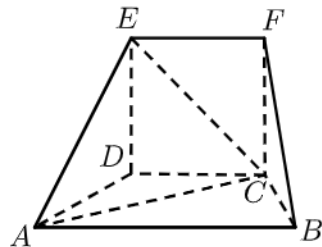
$$\cos \theta = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{CE}|}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{CE}|} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{5}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{1}{5},$$

$\therefore$ 异面直线 AD 、 CE 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$ 。

故选C。

二、线面角

- 3 在如图所示的几何体中，面 $CDEF$ 为正方形，面 $ABCD$ 为等腰梯形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AC \perp FB$ 。



- (1) 求证： $AC \perp$ 平面 FBC 。
- (2) 求 BC 与平面 EAC 所成角的正弦值。
- (3) 线段 ED 上是否存在点 Q ，使平面 $EAC \perp$ 平面 QBC ？证明你的结论。

- (1) 证明见解析 .
 (2) 答案见解析 .
 (3) 答案见解析 .

解析

- (1) 因为 $AB = 2BC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $AC = \sqrt{3}BC$,

所以 $AC \perp BC$.

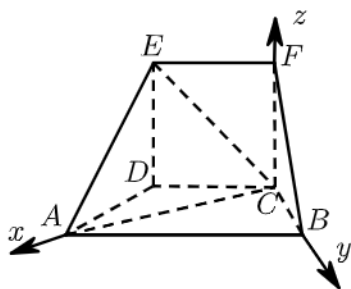
又因为 $AC \perp FB$,

所以 $AC \perp$ 平面 FBC .

- (2) 因为 $AC \perp$ 平面 FBC , 所以 $AC \perp FC$.

因为 $CD \perp FC$, 所以 $FC \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 CA, CF, CB 两两互相垂直, 如图建立的空间直角坐标系 $C-xyz$.



在等腰梯形 $ABCD$ 中, 可得 $CB = CD$.

设 $BC = 1$, 所以 $C(0, 0, 0), A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), E(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

所以 $\overrightarrow{CE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{CB} = (0, 1, 0)$.

设平面 EAC 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CA} = 0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 0, \\ \sqrt{3}x = 0. \end{cases}$ 取 $z = 1$, 得 $n = (0, 2, 1)$.

设 BC 与平面 EAC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CB}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CB} \cdot n|}{|\overrightarrow{CB}| |n|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 BC 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- (3) 线段 ED 上不存在点 Q , 使平面 $EAC \perp$ 平面 QBC . 证明如下:

假设线段 ED 上存在点 Q , 设 $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, t)$ ($0 \leq t \leq 1$), 所以 $\overrightarrow{CQ} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, t)$.

设平面 QBC 的法向量为 $m = (a, b, c)$, 则有 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CQ} = 0. \end{cases}$

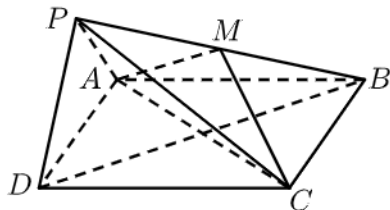
所以 $\begin{cases} b = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b + tc = 0. \end{cases}$ 取 $c = 1$, 得 $m = (-\frac{2}{\sqrt{3}}t, 0, 1)$.

要使平面 $EAC \perp$ 平面 QBC , 只需 $m \cdot n = 0$,

即 $-\frac{2}{\sqrt{3}}t \times 0 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 0$, 此方程无解.

所以线段 ED 上不存在点 Q , 使平面 $EAC \perp$ 平面 QBC .

- 4 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上, $PD \parallel$ 平面 MAC , $PA = PD = \sqrt{6}$, $AB = 4$.



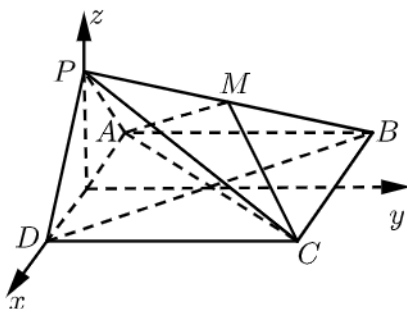
- (1) 求证: M 为 PB 中点.
- (2) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小.
- (3) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{\pi}{3}$.
- (3) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

解析

- (1) 设 AC 与 BD 交于点 O , 连结 MO .
 $\because PD \parallel$ 平面 MAC , $PD \subset$ 平面 PBD ,
 平面 $PBD \cap$ 平面 $MAC = MO$,
 $\therefore PD \parallel MO$,
 $\because O$ 为 BD 中点,
 $\therefore M$ 为 PB 中点.
- (2) 设 AD 中点为 E .



$$\because PA = PD, \therefore PE \perp AD,$$

$$\because \text{平面} PAD \perp \text{平面} ABCD,$$

$$\text{平面} PAD \cap \text{平面} ABCD = AD,$$

$$PE \subset \text{平面} PAD,$$

$$PE \perp \text{平面} ABCD.$$

$$\because \text{底面} ABCD \text{为正方形}, \therefore AD \perp AB,$$

$$\because EO \parallel AB, \therefore EO \perp AD.$$

以E为坐标原点, 分别以ED, EO, EP为x, y, z轴建立如图所示的空间直角坐标系.

$$A(-2, 0, 0), B(-2, 4, 0), D(2, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{PD} = (2, 0, -\sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (4, -4, 0)$$

设 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 分别为平面PAD与平面PBD的一个法向量,

$$\text{设} \vec{n} = (x, y, z), \text{易得} \vec{m} = (0, 1, 0)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{PD} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x - \sqrt{2}z = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{设} x = 1, \text{则} y = 1, z = \sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 1, \sqrt{2}).$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}.$$

显然所求二面角B-PD-A为锐角, 所以二面角B-PD-A是 $\frac{\pi}{3}$.

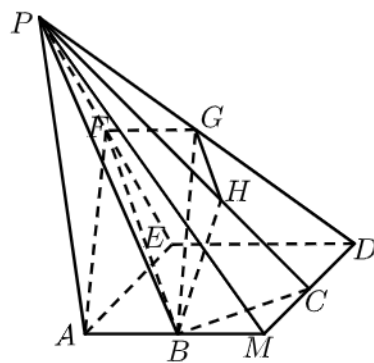
$$(3) \text{ 设} M\left(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(2, 4, 0), \overrightarrow{MC} = \left(3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

设直线MC与平面BDP所成角为 θ .

$$\text{所以} \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{MC}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{4}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{9+4+\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

所以直线MC与平面BDP所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

- 5 如图, 正方形AMDE的边长为2, B, C分别为AM、MD的中点, 在五棱锥P-ABCDE中, F为棱PE的中点, 平面ABF与棱PD, PC分别交于点G、H.



- (1) 求证： $AB \parallel FG$.
- (2) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCDE$, 且 $PA = AE$, 求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小 , 并求线段 PH 的长 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 直线 BC 与平面 ABF 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, $|PH| = 2$

解析

- (1) 方法一： $\because AM \parallel ED, AM \not\subset$ 面 $PED, ED \subset$ 面 PED ,

$\therefore AM \parallel$ 面 PED ,

$\because AM \subset$ 面 ABF , 即 $AB \subset$ 面 ABF ,

面 $ABF \cap$ 面 $PED = FG$,

$\therefore AB \parallel FG$

方法二：在正方形 $AMDE$ 中 , 因为 B 是 AM 的中点 , 所以 $AB \parallel DE$.

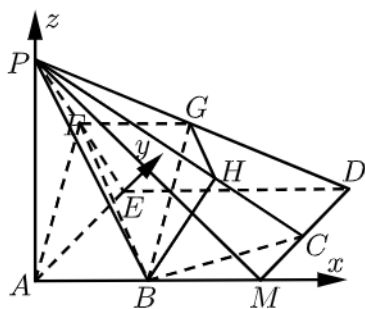
又因为 $AB \not\subset$ 平面 PDE ,

所以 $AB \parallel$ 平面 PDE .

因为 $AB \subset$ 平面 ABF , 且平面 $ABF \cap$ 平面 $PDE = FG$,

所以 $AB \parallel FG$.

- (2) 如图建立空间坐标系 $A - xyz$,



各点坐标如下： $A(0, 0, 0), E(0, 2, 0), B(1, 0, 0), C(2, 1, 0), F(0, 1, 1), P(0, 0, 2)$

设 ABF 的法向量为 $\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{AB} = (1, 0, 0)$, $\vec{AF} = (0, 1, 1)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

令 $y = 1$ 得: $\vec{n} = (0, 1, -1)$

$$\text{又} \because \vec{BC} = (1, 1, 0), \therefore \sin \langle \vec{BC}, \vec{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

直线 BC 与平面 ABF 所成角为 $\frac{\pi}{6}$.

设 $H(x_1, y_1, z_1)$, 由 $\vec{PH} = t\vec{PC}$, 则 $(x_1, y_1, z_1 - 2) = t(2, 1, -2)$

$$\therefore H(2t, t, 2 - 2t)$$

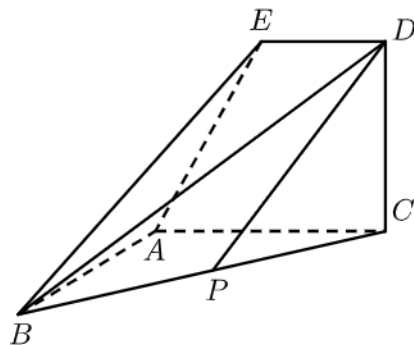
$$\text{又} \because H \in ABF, \vec{BH} = (2t - 1, t, 2 - 2t)$$

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{BH} = 0, \therefore t + 2t - 2 = 0, \therefore t = \frac{2}{3}, \therefore H\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{PH} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore |PH| = 2$$

三、二面角

- 6 如图, 已知 $ACDE$ 是直角梯形, 且 $ED \parallel AC$, 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC , $\angle BAC = \angle ACD = 90^\circ$, $AB = AC = AE = 2$, $ED = \frac{1}{2}AB$, P 是 BC 的中点.



- (1) 求证: $DP \parallel$ 平面 EAB ;
- (2) 求平面 EBD 与平面 ABC 所成锐二面角大小的余弦值.

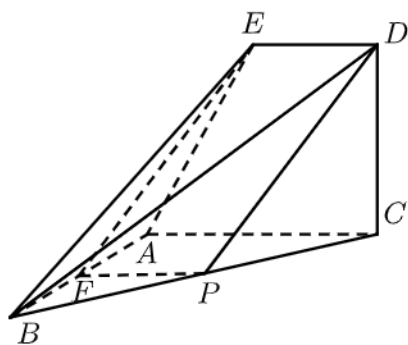
答案

(1) 证明见解析

(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

解析

(1) 取 AB 的中点 F , 连结 PF , EF .



因为 P 是 BC 的中点,

所以 $FP \parallel AC$, $FP = \frac{1}{2}AC$.

因为 $ED \parallel AC$, 且 $ED = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$,

所以 $ED \parallel FP$, 且 $ED = FP$,

所以四边形 $EFPD$ 是平行四边形.

所以 $DP \parallel EF$.

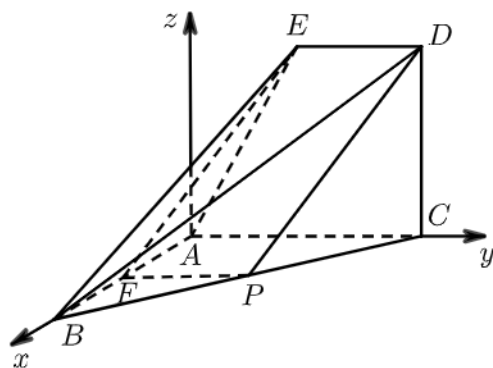
因为 $EF \subset$ 平面 EAB , $DP \not\subset$ 平面 EAB ,

所以 $DP \parallel$ 平面 EAB .

(2) 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, 平面 $EACD \perp$ 平面 ABC ,

所以以点 A 为原点, 直线 AB 为 x 轴, 直线 AC 为 y 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 z 轴在平面 $EACD$ 内.



由已知可得 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $E(0,1,\sqrt{3})$, $D(0,2,\sqrt{3})$.

所以 $\vec{EB} = (2, -1, -\sqrt{3})$, $\vec{ED} = (0, 1, 0)$,

设平面 EBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$.

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{ED} = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以} \begin{cases} 2x - y - \sqrt{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

取 $z = 2$,

所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 2)$.

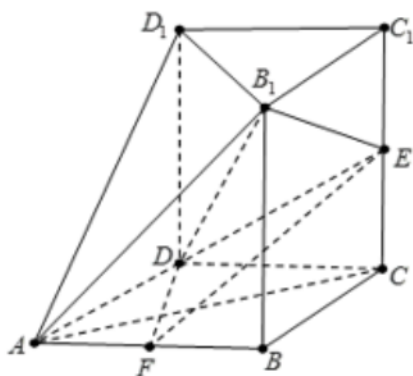
又因为平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$.

$$\text{所以} \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7} .$$

即平面 EBD 与平面 ABC 所成锐二面角大小的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

- 7 如图, 几何体 $ABCD - B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = a$, 面 $B_1C_1D_1 //$ 面 $ABCD$, BB_1 、 CC_1 、 DD_1 都垂直于面 $ABCD$, 且 $BB_1 = \sqrt{2}a$, E 为 CC_1 的中点, F 为 AB 的中

点 .



- (1) 求证: $\triangle DB_1E$ 为等腰直角三角形;
- (2) 求二面角 $B_1 - DE - F$ 的余弦值 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析

(1) 连接 BD , 交 AC 于 O , 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $BD = a$

因为 BB_1 、 CC_1 都垂直于面 $ABCD$, $\therefore BB_1 // CC_1$, 又面 $B_1C_1D_1 //$ 面 $ABCD$, $\therefore$

$BC // B_1C_1$

所以四边形 BCC_1B_1 为平行四边形, 则 $B_1C_1 = BC = a$

因为 BB_1 、 CC_1 、 DD_1 都垂直于面 $ABCD$, 则

$$DB_1 = \sqrt{DB^2 + BB_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3}a \quad DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{6}a}{2}$$

$$B_1E = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{6}a}{2}$$

$$\text{所以 } DE^2 + B_1E^2 = \frac{6a^2 + 6a^2}{4} = 3a^2 = DB_1^2$$

所以 $\triangle DB_1E$ 为等腰直角三角形 .

(2) 取 DB_1 的中点 H , 因为 O , H 分别为 DB , DB_1 的中点, 所以 $OH // BB_1$;

以 OA, OB, OH 分别为 x, y, z 轴建立坐标系

$$\text{则 } D(0, -\frac{a}{2}, 0), E(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}a), B_1(0, \frac{a}{2}, \sqrt{2}a), \\ F(\frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{a}{4}, 0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DB_1} = (0, a, \sqrt{2}a), \overrightarrow{DE} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}a), \\ \overrightarrow{DF} = (\frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{3}{4}a, 0)$$

设面 DB_1E 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB_1} = 0, \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \text{ 即}$$

$$ay_1 + \sqrt{2}az_1 = 0 \text{ 且 } -\frac{\sqrt{3}}{2}ax_1 + \frac{a}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}az_1 = 0$$

$$\text{令 } z_1 = 1, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (0, -\sqrt{2}, 1)$$

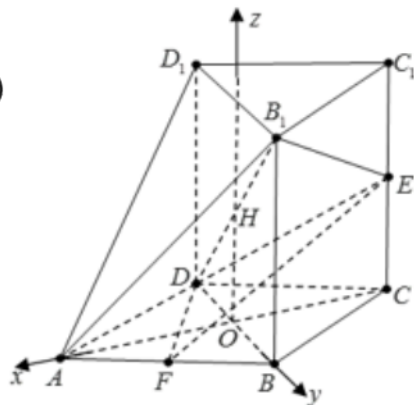
设面 DFE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = 0$$

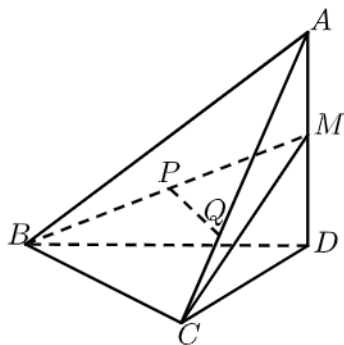
$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{4}ax_2 + \frac{3}{4}ay_2 = 0 \text{ 且 } -\frac{\sqrt{3}}{2}ax_2 + \frac{a}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}az_2 = 0$$

$$\text{令 } x_2 = 1, \text{ 则 } \vec{n}_2 = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$$

$$\text{则 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则二面角 } B_1 - DE - F \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



- 8 如图, 在四面体 $A-BCD$ 中, $AD \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, $AD = 2$, $BD = 2\sqrt{2}$. M 是 AD 的中点, P 是 BM 的中点, 点 Q 在线段 AC 上, 且 $AQ = 3QC$.



- (1) 证明: $PQ \parallel$ 平面 BCD ;
- (2) 若二面角 $C-BM-D$ 的大小为 60° , 求 $\angle BDC$ 的大小.

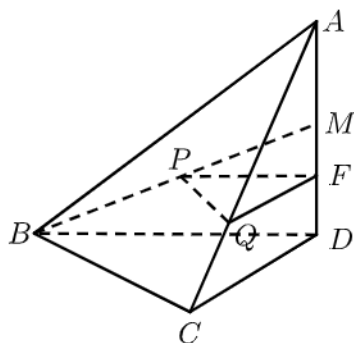
答案

(1) 答案见解析

(2) 答案见解析

解析

(1) 方法一：如图，取 MD 的中点 F ，且 M 是 AD 中点，



所以 $AF = 3FD$ 。

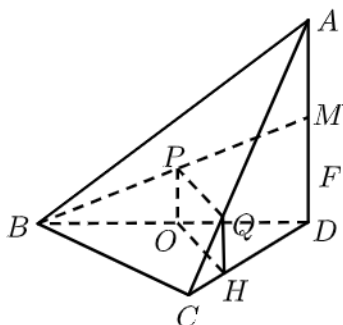
因为 P 是 BM 中点，所以 $PF \parallel BD$ ；

又因为 $AQ = 3QC$ 且 $AF = 3FD$ ，所以 $QF \parallel BD$ ，

所以面 $PQF \parallel$ 面 BDC ，

且 $PQ \subset$ 面 BDC ，所以 $PQ \parallel$ 面 BDC ；

方法二：如图所示，取 BD 中点 O ，且 P 是 BM 中点，



所以 $PO \parallel \frac{1}{2}MD$ ；

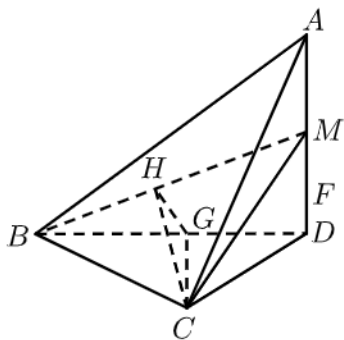
取 CD 的三等分点 H ，使 $DH = 3CH$ ，且 $AQ = 3QC$ ，

所以 $QH \parallel \frac{1}{4}AD \parallel \frac{1}{2}MD$ ，所以 $PO \parallel QH \therefore PQ \parallel OH$ ，且 $OH \subset BCD$ ，

所以 $PQ \parallel$ 面 BDC ；

(2) 如图所示，由已知得到面 $ADB \perp$ 面 BDC ，过 C 作 $CG \perp BD$ 于 G ，所以 $CG \perp BMD$ ，

过 G 作 $GH \perp BM$ 于 H ，连接 CH ，所以 $\angle CHG$ 就是 $C - BM - D$ 的二面角；



由已知得到 $BM = \sqrt{8+1} = 3$, 设 $\angle BDC = \alpha$, 所以

$$\frac{CD}{BD} = \cos \alpha, \sin \alpha = \frac{CG}{CD} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow CD = 2\sqrt{2} \cos \alpha, CG = 2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha, BC = 2\sqrt{2} \sin \alpha,$$

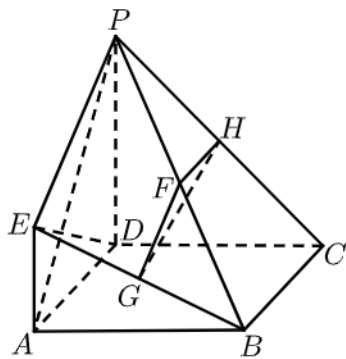
在 $RT\triangle BCG$ 中, $\angle BCG = \alpha \therefore \sin \alpha = \frac{BG}{BC} \therefore BG = 2\sqrt{2} \sin^2 \alpha$,

所以在 $RT\triangle BHG$ 中, $\frac{HG}{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha} = \frac{1}{3} \therefore HG = \frac{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha}{3}$, 所以在 $RT\triangle CHG$ 中

$$\tan \angle CHG = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{CG}{HG} = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha}{\frac{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha}{3}}$$

$$\therefore \tan \alpha = \sqrt{3} \therefore \alpha \in (0, 90^\circ) \therefore \alpha = 60^\circ \therefore \angle BDC = 60^\circ.$$

- 9 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel PD$, $AD = PD = 2EA = 2$, F, G, H 分别为 PB, EB, PC 的中点.



- (1) 求证: $FG \parallel$ 平面 PED ;
- (2) 求平面 FGH 与平面 PBC 所成锐二面角的大小;
- (3) 在线段 PC 上是否存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成的角为 60° ? 若存在, 求出线段 PM 的长; 若不存在, 请说明理由.

答案

(1) 证明见解析;

(2) $\frac{\pi}{4}$.

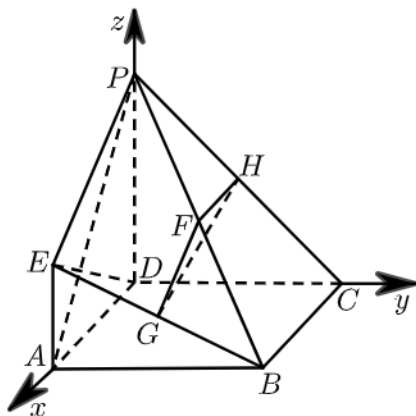
(3) 存在, $PM = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

解析

(1) 因为 F, G 分别为 PB, BE 的中点,
所以 $FG \parallel PE$.
又 $FG \not\subset$ 平面 PED , $PE \subset$ 平面 PED ,
所以 $FG \parallel$ 平面 PED .

(2) 因为 $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel PD$,
所以 $PD \perp$ 平面 $ABCD$,
所以 $PD \perp AD$, $PD \perp CD$.
又因为四边形 $ABCD$ 是正方形,
所以 $AD \perp CD$.

如图, 建立空间直角坐标系,



因为 $AD = PD = 2EA = 2$,

所以 $D(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $A(2, 0, 0)$,

$C(0, 2, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $E(2, 0, 1)$.

因为 F, G, H 分别为 PB, EB, PC 的中点,

所以 $F(1, 1, 1)$, $G(2, 1, \frac{1}{2})$, $H(0, 1, 1)$. 所以 $\overrightarrow{GF} = (-1, 0, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{GH} = (-2, 0, \frac{1}{2})$.

设 $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 FGH 的一个法向量, 则 $\begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{GF} = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{GH} = 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \end{cases}$$

再令 $y_1 = 1$, 得 $n_1 = (0, 1, 0)$. $\overrightarrow{PB} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2)$.

设 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PBC 的一个法向量, 则 $\begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ n_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ 2y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases}$, 令 $z_2 = 1$, 得 $n_2 = (0, 1, 1)$.

$$\text{所以} |\cos \langle n_1, n_2 \rangle| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以平面 FGH 与平面 PBC 所成锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

- (3) 假设在线段 PC 上存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° .

依题意可设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$.

由 $\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2)$, 则 $\overrightarrow{PM} = (0, 2\lambda, -2\lambda)$.

又因为 $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{FP} = (-1, -1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{FM} = (-1, 2\lambda - 1, 1 - 2\lambda)$.

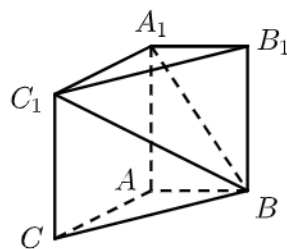
因为直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° , $\overrightarrow{PA} = (2, 0, -2)$,

$$\text{所以} \left| \cos \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{PA} \rangle \right| = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{|-2 - 2 + 4\lambda|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 2(2\lambda - 1)^2}}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{5}{8}.$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PM} = (0, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}), |\overrightarrow{PM}| = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

所以在线段 PC 上存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° , 此时 $PM = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

- 10 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形, 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , $AB = 3$, $BC = 5$.



- (1) 求证: $AA_1 \perp$ 平面 ABC .
- (2) 求二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值.
- (3) 证明: 在线段 BC_1 上存在点 D , 使得 $AD \perp A_1B$, 并求 $\frac{BD}{BC_1}$ 的值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值为 $\frac{16}{25}$.
- (3) 证明见解析, $\frac{BD}{BC_1} = \frac{9}{25}$.

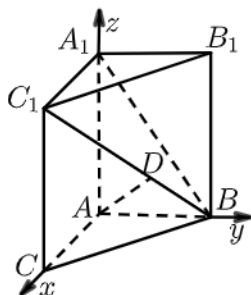
解析

- (1) 因为 AA_1C_1C 为正方形, 所以 $AA_1 \perp AC$.
因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 且 AA_1 垂直于这两个平面的交线 AC ,

所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC .

- (2) 由 (1) 知 $AA_1 \perp AC$, $AA_1 \perp AB$.

由题知 $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 4$, 所以 $AB \perp AC$.



如图, 以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A - xyz$, 则

$B(0, 3, 0)$, $A_1(0, 0, 4)$, $B_1(0, 3, 4)$, $C_1(4, 0, 4)$.

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3y - 4z = 0 \\ 4x = 0 \end{cases},$$

令 $z = 3$, 则 $x = 0$, $y = 4$, 所以 $\vec{n} = (0, 4, 3)$.

同理可得, 平面 B_1BC_1 的法向量为 $\vec{m} = (3, 4, 0)$.

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{16}{25} .$$

由题知二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 为锐角 ,

所以二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值为 $\frac{16}{25}$.

- (3) 设 $D(x, y, z)$ 是直线 BC_1 上一点, 且 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC_1}$.

$$\text{所以 } (x, y - 3, z) = \lambda(4, -3, 4) .$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = (4\lambda, 3 - 3\lambda, 4\lambda) .$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \text{ 即 } 9 - 25\lambda = 0 ,$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{9}{25} .$$

因为 $\frac{9}{25} \in [0, 1]$, 所以在线段 BC_1 上存在点 D , 使得 $AD \perp A_1B$.

$$\text{此时, } \frac{BD}{BC_1} = \lambda = \frac{9}{25} .$$