

空间向量的应用

一、垂直和平行

1. 空间向量平行和垂直的条件

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$(1) \vec{a} // \vec{b} \left(\vec{b} \neq 0 \right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

请读者自行证明上面两个结论.

例1

1 已知向量 $\vec{a} = (2, -3, 5)$ 与向量 $\vec{b} = (-2, x, y)$ 平行, 则 x, y 的值分别是 ().

A. 3和-5

B. -3和5

C. -3和-5

D. 3和5

答案 A

解析 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 易得 $\lambda = -1$.

2 下列每对向量具有垂直关系的是 ().

A. $(3, 2, 3), (1, 1, -1)$

B. $(-2, 1, 3), (6, -5, 7)$

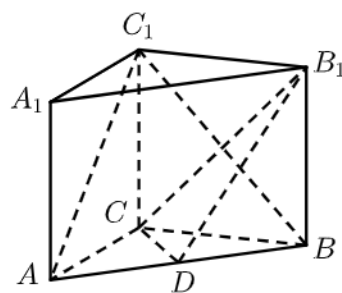
C. $(3, 4, 0), (0, 0, 5)$

D. $(4, 0, 3), (8, 0, 6)$

答案 C

解析 因为 $(3, 4, 0) \cdot (0, 0, 5) = 3 \times 0 + 4 \times 0 + 0 \times 5 = 0$, 所以选C.

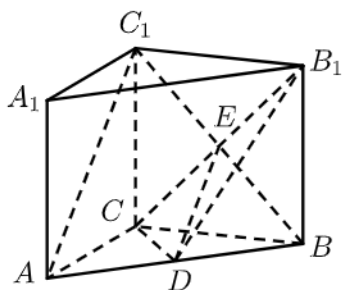
3 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, $AA_1 = 4$, 点D是AB的中点.



求证： $AC \perp BC_1$.

答案 证明见解析 .

解析 方法一： $\because$ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 底面三边长 $AC = 3$, $BC = 4$



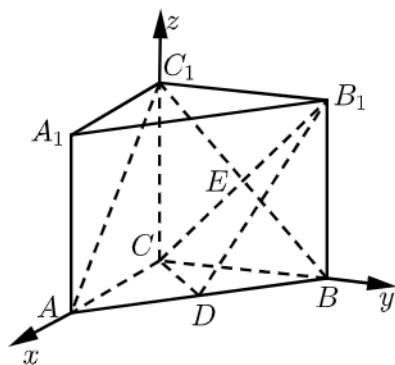
$\therefore AC \perp BC$, 且 BC_1 在平面 ABC 内的投影为 BC ,

$\therefore AC \perp BC_1$.

方法二： $\because$ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 底面三边长 $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$,

$\therefore AC$, BC , C_1C 两两垂直 ,

如图 , 以 C 为坐标原点 , 直线 CA , CB , C_1C 分别为 x 轴 , y 轴 , z 轴 , 建立空间直角坐标系 ,



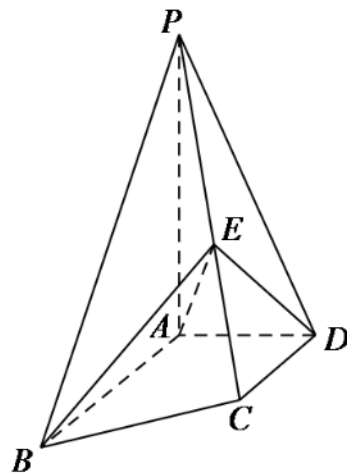
则 $C(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $C_1(0,0,4)$, $B(0,4,0)$, $B_1(0,4,4)$, $D\left(\frac{3}{2}, 2, 0\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 0)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0, -4, 4)$,

$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$,

$\therefore AC \perp BC_1$.

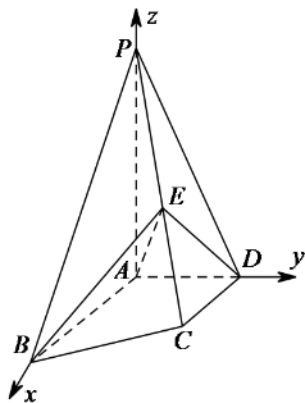
- 4 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $DA \perp AB$, $AB = AP = 2$, $DA = DC = 1$, E 为 PC 上一点, 且 $PE = \frac{2}{3}PC$.



求证: $AE \perp$ 平面 PBC .

答案 证明见解析.

解析 以 A 为原点, AB 为 x 轴, AD 为 y 轴, AP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $P(0,0,2)$, $E\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B(2,0,0)$,

$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{PB} = (2,0,-2)$, $\overrightarrow{PC} = (1,1,-2)$,

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0$,

$\therefore AE \perp PB$, $AE \perp PC$,

又 $PB \cap PC = P$,

$\therefore AE \perp$ 平面 PBC .



练1

5 已知A、B、C三点的坐标分别为A(4,1,3)、B(2,-5,1)、C(3,7,λ), 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, 则λ等于().

A. 28

B. -28

C. 14

D. -14

答案 D

解析 $\overrightarrow{AB} = (-2, -6, -2)$,

$\overrightarrow{AC} = (-1, 6, \lambda - 3)$,

$\because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,

解得 $\lambda = -14$.

故选D.

6 已知向量 $\vec{a} = (2, 4, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 // l_2$, 则().

A. $x = 6, y = \frac{15}{2}$

B. $x = 3, y = \frac{15}{2}$

C. $x = 3, y = 15$

D. $x = 6, y = 15$

答案 A

解析 $\because l_1 // l_2$,

$\therefore$ 存在非0实数 k 使得 $\vec{a} = k\vec{b}$,

$\therefore \begin{cases} 2 = 3k \\ 4 = kx \\ 5 = ky \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 6 \\ y = \frac{15}{2} \end{cases}$.

故选A.

7 已知向量 $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是().

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{7}{4}$

答案 D

解析 $\because \vec{a} = (0, 1, -1), \vec{b} = (1, 0, 2),$
 $\therefore k\vec{a} + \vec{b} = (1, k, -k+2), \vec{a} - \vec{b} = (-1, 1, -3),$
 $\therefore k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 互相垂直,
 $\therefore -1 + k - 3(-k+2) = 0,$
 解得: $k = \frac{7}{4}.$
 故选D.

8 若 $\vec{a} = (0, 1, -1), \vec{b} = (1, 1, 0),$ 且 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp \vec{a},$ 则实数 λ 的值是 ().

- A. -1 B. 0 C. 1 D. -2

答案 D

解析 因为 $\vec{a} = (0, 1, -1), \vec{b} = (1, 1, 0),$ 所以 $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (\lambda, 1 + \lambda, -1),$
 又因为 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp \vec{a},$ 所以 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{a} = 1 + \lambda + 1 = 0,$ 解得 $\lambda = -2,$ 故选D.

9 直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{a} = (1, -3, -1), \vec{b} = (8, 2, 2),$ 则 ().

- A. $l_1 \perp l_2$ B. $l_1 // l_2$
 C. l_1 与 l_2 相交不平行 D. l_1 与 l_2 重合

答案 A

解析 $\because$ 直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{a} = (1, -3, -1), \vec{b} = (8, 2, 2),$
 $\therefore 1 \times 8 - 3 \times 2 - 1 \times 2 = 0,$
 $\therefore l_1 \perp l_2.$
 故选A.

10 已知向量 $\vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (-4, 2, x),$ 若 $\vec{a} \perp \vec{b},$ 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$ 若 $\vec{a} // \vec{b}$ 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 1: $\frac{10}{3}$

2: -6

解析 ① $\because \vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (-4, 2, x),$

$$\vec{a} \perp \vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{即: } 2 \times (-4) + (-1 \times 2) + 3x = 0,$$

$$\therefore x = \frac{10}{3}.$$

② 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则存在 λ , 使 $\lambda \vec{a} = \vec{b}$,

$$\therefore \begin{cases} -4 = 2\lambda \\ 2 = -\lambda \\ x = 3\lambda \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -6 \end{cases}.$$

11 已知 $\vec{a} = (1, 5, -1), \vec{b} = (-2, 3, 5).$

(1) 若 $(k\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b})$, 求实数 k 的值.

(2) 若 $(k\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 3\vec{b})$, 求实数 k 的值.

答案 (1) $k = -\frac{1}{3}.$

(2) $k = \frac{106}{3}.$

解析 (1) $\because \vec{a} = (1, 5, -1), \vec{b} = (-2, 3, 5),$

$$\therefore k\vec{a} + \vec{b} = (k-2, 5k+3, 5-k), \vec{a} - 3\vec{b} = (7, -4, -16),$$

$$\text{又 } (k\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - 3\vec{b}),$$

$$\therefore \frac{k-2}{7} = \frac{5k+3}{-4} = \frac{5-k}{-16},$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{3}.$$

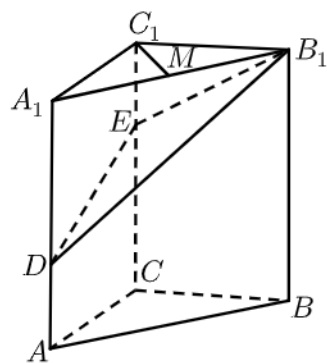
(2) $\because (k\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 3\vec{b}),$

$$\therefore (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 0,$$

$$\text{即 } 7(k-2) - 4(5k+3) - 16(5-k) = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{106}{3}.$$

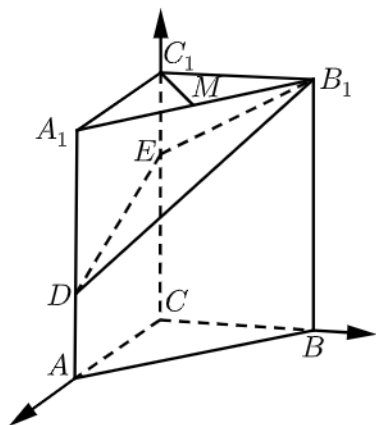
- 12 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $CC_1 = 3$, 点 D , E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上, 且 $AD = 1$, $CE = 2$, M 为棱 A_1B_1 的中点.



求证: $C_1M \perp B_1D$.

答案 证明见解析.

解析 依题意, 以 C 为原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (如图),



可得 $C(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C_1(0, 0, 3)$, $A_1(2, 0, 3)$, $B_1(0, 2, 3)$, $D(2, 0, 1)$,

$E(0, 0, 2)$, $M(1, 1, 3)$,

$\overrightarrow{C_1M} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{B_1D} = (2, -2, -2)$,

从而 $\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 2 - 2 + 0 = 0$,

$\therefore C_1M \perp B_1D$.

二、异面直线夹角

(1) 概念：过空间任意一点 O 分别做异面直线 a 与 b 的平行线 a' 与 b' ，那么直线 a' 与 b' 所成的不大于 90° 的角，叫做异面直线 a 与 b 所成的角。

(2) 异面直线所成角的向量公式：

两条异面直线 a 与 b 的方向向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ ，当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角不大于 90° ，异面直线 a, b 所成的角 θ 与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角相等；当 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角大于 90° ，异面直线 a, b 所成的角与 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角互补。所以直线 a, b 所成的角 θ 的余弦值为 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$ 。

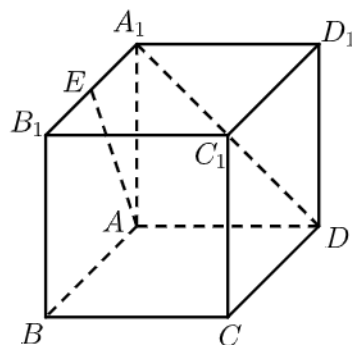
(3) 取值范围： $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$



例2

13

如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 A_1B_1 的中点，则异面直线 AE 与 A_1D 所成的角的余弦值为_____。

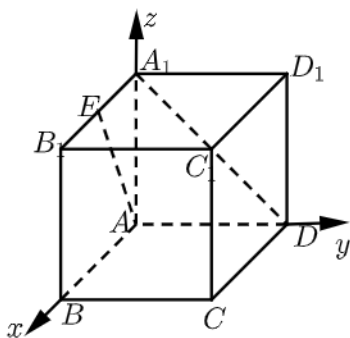


答案

$$\frac{\sqrt{10}}{5}$$

解析

以 A 为原点， AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为2，

则 $A(0, 0, 0)$ ， $E(1, 0, 2)$ ， $A_1(0, 0, 2)$ ， $D(0, 2, 0)$ ，

$$\overrightarrow{AE} = (1, 0, 2), \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -2),$$

设异面直线 AE 与 A_1D 所成的角为 θ ,

$$\cos \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{A_1D} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

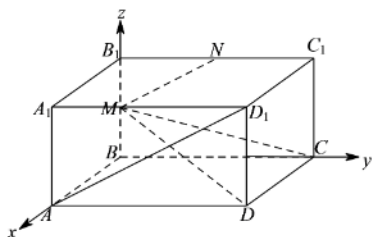
$\therefore$ 异面直线 AE 与 A_1D 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

- 14 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 BB_1, B_1C_1 的中点, 若 $\angle CMN = 90^\circ$, 则异面直线 AD_1 与 DM 所成的角为 _____.

答案 90°

解析 建立空间直角坐标系,



设 $AB = a, BC = b, BB_1 = c$,

则 $M(0, 0, \frac{c}{2}), N(0, \frac{b}{2}, c), C(0, b, 0)$,

$A(a, 0, 0), D_1(a, b, c), D(a, b, 0)$,

则 $\overrightarrow{MC} = (0, b, -\frac{c}{2}), \overrightarrow{MN} = (0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$,

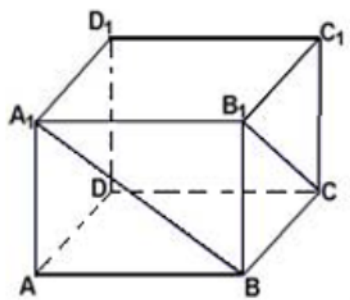
由 $\angle CMN = 90^\circ$, 可知 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 0$, 解得 $2b^2 = c^2$.

所以 $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DM} = -b^2 + \frac{1}{2}c^2 = 0$, 所以异面直线 AD_1 与 DM 所成的角为 90° .



练2

- 15 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DA = DC = 4, DD_1 = 3$, 求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值.



答案 $\frac{9}{25}$

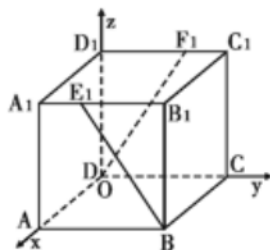
解析 连接 A_1D ，因为 $A_1D \parallel B_1C$ ，

所以 $\angle BA_1D$ 即为异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角

连接 BD ，在 $\triangle AD_1B$ 中， $A_1B = A_1D = 5$ ， $BD = 4\sqrt{2}$ ，

$$\cos \angle BA_1D = \frac{A_1B^2 + A_1D^2 - BD^2}{2A_1B \cdot A_1D} = \frac{25 + 25 - 32}{2 \times 5 \times 5} = \frac{9}{25}.$$

- 16 如图，在空间直角坐标系 xOy 中，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， E_1 在 A_1B_1 上， F_1 在 C_1D_1 上，且 $B_1E_1 = D_1F_1 = \frac{3A_1B_1}{4}$ 。



- (1) 求向量 $\overrightarrow{BE_1}$ ， $\overrightarrow{DF_1}$ 的坐标；
- (2) 求 BE_1 与 DF_1 所成的角的余弦值。

答案 (1) $\overrightarrow{BE_1} = (0, -\frac{3}{4}, 1)$ ， $\overrightarrow{DF_1} = (0, \frac{3}{4}, 1)$ 。
(2) $\frac{7}{25}$ 。

解析 (1) $B(1, 1, 0)$ ， $E_1(1, \frac{1}{4}, 1)$ ， $D(0, 0, 0)$ ， $F_1(0, \frac{3}{4}, 1)$ ，
 $\overrightarrow{BE_1} = (1, \frac{1}{4}, 1) - (1, 1, 0) = (0, -\frac{3}{4}, 1)$ ，
 $\overrightarrow{DF_1} = (0, \frac{3}{4}, 1) - (0, 0, 0) = (0, \frac{3}{4}, 1)$ 。

$$(2) \quad |\overrightarrow{BE_1}| = \frac{5}{4}, \quad |\overrightarrow{DF_1}| = \frac{5}{4}, \quad \overrightarrow{BE_1} \cdot \overrightarrow{DF_1} = 0 \times 0 + \left(-\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) + 1 \times 1 = \frac{7}{16}.$$

$$\cos \langle \overrightarrow{BE_1}, \overrightarrow{DF_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE_1} \cdot \overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}| \cdot |\overrightarrow{DF_1}|} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{5}{4} \times \frac{5}{4}} = \frac{7}{25}.$$

三、线面角

1. 平面的法向量

已知平面 α ，如果向量 $\vec{n}$ 的基线与平面 α 垂直，则向量 $\vec{n}$ 叫做**平面 α 的法向量**。

由平面法向量的定义可知，平面 α 的一个法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量。

由于同时垂直于同一平面的两条直线平行，可以推知，一个平面的所有法向量互相平行。

有了上面的理论做保障，我们可以按照如下方法证明直线与平面平行或垂直：

设一直线 l ，一平面 α 的法向量是 $\vec{n}$ ：

$l \perp \alpha \Leftrightarrow$ 直线 l 的方向向量与 $\vec{n}$ 平行；

$l // \alpha \Leftrightarrow$ 直线 l 的方向向量与 $\vec{n}$ 垂直。

那么问题来了，**如何确定已知平面的法向量**？

【例题】已知点 $A(1, 2, 2)$ ， $B(2, 5, 4)$ ， $C(0, 1, 3)$ ，求平面 ABC 的法向量。

【解析】由已知得：

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2), \quad \overrightarrow{BC} = (-2, -4, -1),$$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则有：

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

解上述方程组得： $x : y : z = 5 : -3 : 2$ 。

为了获取一个准确且能为计算带来方便的法向量，不妨令 $x = 5$ ，则带入得 $y = -3$ ， $z = 2$

故平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (5, -3, 2)$ 。

2. 线面角的概念

直线与直线在平面内的射影所成的角称为**直线与平面的夹角**。

由上述定义不难得出：

若直线与平面垂直，则直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ ；

若直线与平面平行，则直线与平面的夹角为 0。

直线与平面的夹角的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

下面给出用向量运算求解直线 l 与平面 α 的夹角的步骤：

①建立合理的空间直角坐标系；

②求出直线的方向向量 $\vec{AB}$ 和平面 α 的法向量 $\vec{n}$ ；

③设直线与平面 α 的夹角为 θ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)，则 θ 由表达式 $\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|}$ 唯一确定。

例3

17 已知向量 $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ ， $\vec{AC} = (0, 2, 0)$ ， $\vec{AD} = (0, 0, 3)$ ，则 AB 与平面 BCD 所成角的正弦值为 ()。

A. $\frac{6}{7}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

答案 A

解析 $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = (-1, 0, 0) + (0, 2, 0) = (-1, 2, 0)$ ，

$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = (-1, 0, 0) + (0, 0, 3) = (-1, 0, 3)$ ，

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

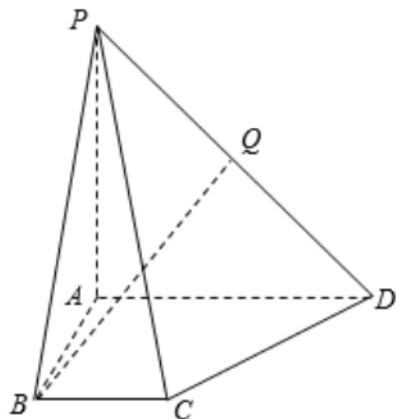
则 $\begin{cases} \vec{BC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{BD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$ ，

令 $y = 1$ ，得 $x = 2$ ， $z = \frac{2}{3}$ ，所以 $\vec{n} = (2, 1, \frac{2}{3})$ 。

设 AB 与平面 BCD 所成角为 θ ，

则 $\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{4 + 1 + \frac{4}{9}}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$ 。

在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $PA = AD = 2$ ， $AB = BC = 1$ ， Q 为 PD 中点。



- (1) 求证： $PD \perp BQ$ ；
- (2) 求直线 BQ 与平面 PCD 所成角的正弦值。

答案

- (1) 证明见解析
- (2) $\frac{1}{3}$ 。

解析

- (1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp AB$ ， $PA \perp AD$ ，又 $AD \perp AB$ ，如图，建立以 A 为原点， AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AP 为 z 轴的空间直角坐标系。

由已知， $PA = AD = 2$ ，

$AB = BC = 1$ ， $AD \parallel BC$ 。

所以， $A(0,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ，

$C(1,1,0)$ ， $D(0,2,0)$ ， $P(0,0,2)$

又 Q 为 PD 中点，所以 $Q(0,1,1)$ 。

所以 $\overrightarrow{PD} = (0,2,-2)$ ， $\overrightarrow{BQ} = (-1,1,1)$ ，

所以 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$ ，

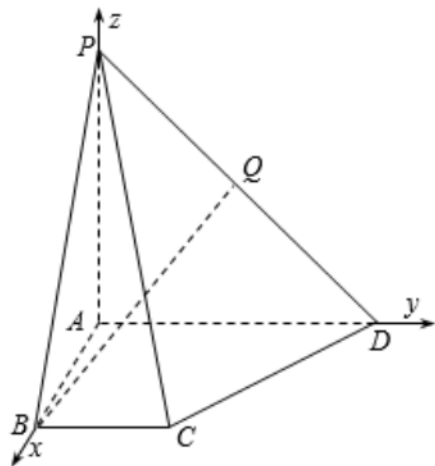
所以 $PD \perp BQ$ 。

- (2) 设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$ ，

则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$ ， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ 。又 $\overrightarrow{CD} = (-1,1,0)$ ，

所以 $\begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$ ，

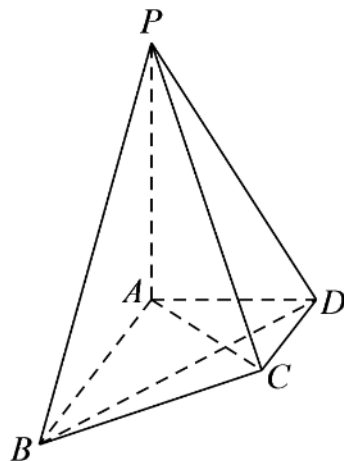
令 $c = 1$ ，得 $a = b = 1$ ，所以 $\vec{n} = (1,1,1)$ 。



$$\text{因此} \cos(\overrightarrow{BQ}, \vec{n}) = \frac{\overrightarrow{BQ} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BQ}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

所以直线 BQ 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.

- 19 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AB = 4$, $AD = 2\sqrt{2}$, $CD = 2$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 4$.



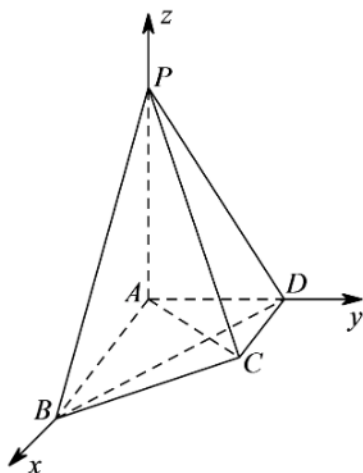
- (1) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = m$, 求证: $CD \parallel m$;
- (2) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (3) 设点 Q 为线段 PB 上一点, 且直线 QC 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{PQ}{PB}$ 的值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) $\frac{PQ}{PB} = \frac{7}{12}$.

解析

- (1) 因为 $AB \parallel CD$, $CD \not\subset$ 平面 PAB ,
 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 PAB .
 因为 $CD \subset$ 平面 PCD , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = m$,
 所以 $CD \parallel m$.
- (2) 因为 $AP \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 所以以 A 为坐标原点,
 AB , AD , AP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图空间直角坐标系,



则 $B(4,0,0)$, $P(0,0,4)$, $D(1,\sqrt{2},0)$, $C(2,2\sqrt{2},0)$.

所以 $\overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2\sqrt{2}, 0)$,

$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 4)$,

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \times 2 + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 0 \times 0 = 0$,

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AP} = (-4) \times 0 + 2\sqrt{2} \times 0 + 0 \times 4 = 0$.

所以 $BD \perp AC$, $BD \perp AP$.

因为 $AP \cap AC = A$, $AC \subset \text{平面} PAC$,

$PA \subset \text{平面} PAC$,

所以 $BD \perp \text{平面} PAC$.

(3) 设 $\frac{PQ}{PB} = \lambda$ (其中 $0 \leq \lambda \leq 1$), $Q(x, y, z)$, 直线 QC 与平面 PAC 所成角为 θ . 所以

$\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PB}$. 所以 $(x, y, z - 4) = \lambda(4, 0, -4)$.

所以 $\begin{cases} x = 4\lambda, \\ y = 0, \\ z = -4\lambda + 4, \end{cases}$ 即 $Q(4\lambda, 0, -4\lambda + 4)$.

所以 $\overrightarrow{CQ} = (4\lambda - 2, -2\sqrt{2}, -4\lambda + 4)$.

由 (II) 知平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{2}, 0)$.

因为 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{CQ}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|-4(4\lambda - 2) - 8|}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{(4\lambda - 2)^2 + 8 + (-4\lambda + 4)^2}}$.

解得 $\lambda = \frac{7}{12} \in [0, 1]$. 所以 $\frac{PQ}{PB} = \frac{7}{12}$.

A. 1

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B

解析

$$\therefore D(0,0,0) , A_1(1,0,1) , C(0,1,0) , B(1,1,0) ,$$
$$\therefore \overrightarrow{A_1B} = (0, 1, -1), \overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{DC} = (0, 1, 0),$$

设平面 A_1B_1CD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = y = 0 \end{cases},$$

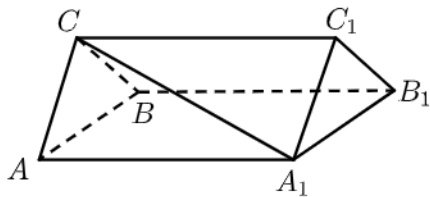
取 $x = 1$, 取 $\vec{n} = (1, 0, -1)$,

设直线 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = \left| \cos \left\langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1 B} \right\rangle \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

21



(1) 证明 $AB \perp A_1C$;

(2) 若平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , $AB = CB = 2$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.

(1) 答案见解析

(2) 答案见解析

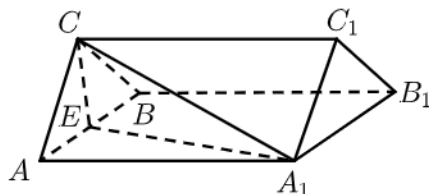
解析

(1) 取 AB 中点 E , 连结 CE , A_1B , A_1E ,

$\because AB = AA_1$, $\angle BAA_1 = 60^\circ$, $\therefore \triangle BAA_1$ 是正三角形

$\therefore A_1E \perp AB$, $\because CA = CB$, $\therefore CE \perp AB$, $\because CE \cap A_1E = E$, $\therefore AB \perp$ 面 CEA_1 ,

$\therefore AB \perp A_1C$.



(2) 由(1)知 $EC \perp AB$, $EA_1 \perp AB$,

又 $\because$ 面 $ABC \perp$ 面 ABB_1A_1 , 面 $ABC \cap$ 面 $ABB_1A_1 = AB$,

$\therefore EC \perp$ 面 ABB_1A_1 , $\therefore EC \perp EA_1$,

$\therefore EA, EC, EA_1$ 两两相互垂直, 以 E 为坐标原点, EA 的方向为 x 轴正方向, $|\overrightarrow{EA}|$ 为单位长度, 建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$.

由题设知 $A(1, 0, 0)$, $A_1(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{BC} = (1, 0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-1, \sqrt{3}, 0)$,

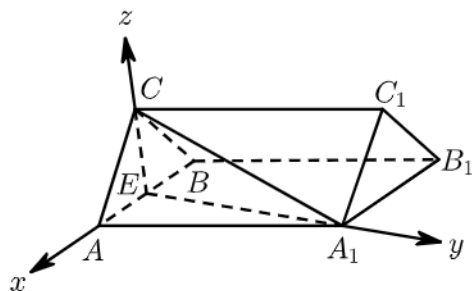
$\overrightarrow{A_1C} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 CBB_1C_1 的法向量,

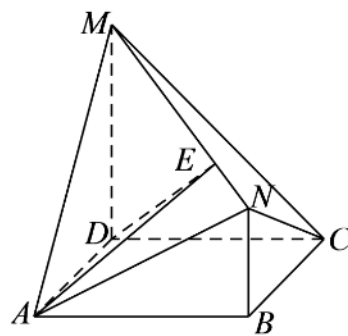
则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$, 可取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$,

$\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

$\therefore$ 直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所称角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



22 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \parallel MD$, 且 $NB = 1$, $MD = 2$.



- (1) 求证： $AM \parallel$ 平面 BCN .
- (2) 求 AN 与平面 MNC 所成角的正弦值 .
- (3) E 为直线 MN 上一点，且平面 $ADE \perp$ 平面 MNC ，求 $\frac{ME}{MN}$ 的值 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) $\frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}$.

解析

(1) $\because ABCD$ 是正方形

$$\therefore BC \parallel AD .$$

$BC \not\subset$ 平面 AMD , $AD \subset$ 平面 AMD ,

$$\therefore BC \parallel \text{平面} AMD .$$

$$\because NB \parallel MD ,$$

$\because NB \not\subset$ 平面 AMD , $MD \subset$ 平面 AMD ,

$$\therefore NB \parallel \text{平面} AMD .$$

$\because NB \cap BC = B$, $NB \subset$ 平面 BCN , $BC \subset$ 平面 BCN ,

$$\therefore \text{平面} AMD \parallel \text{平面} BCN$$

$$\therefore AM \subset \text{平面} AMD$$

$$\therefore AM \parallel \text{平面} BCN .$$

(2) $\because MD \perp$ 平面 $ABCD$, $ABCD$ 是正方形，所以，可选点 D 为原点， DA , DC , DM 所在直线

分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系（如图）则 $A(2, 0, 0)$, $M(0, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$,

$$N(2, 2, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{AN} = (0, 2, 1) ,$$

$$\overrightarrow{MN} = (2, 2, -1), \overrightarrow{MC} = (0, 2, -2)$$

设平面 MNC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{令 } z = 2, \text{ 则 } \vec{n} = (-1, 2, 2)$$

设 AN 与平面 MNC 所成角为 θ ,

$$\therefore \sin \theta = \left| \cos(\overrightarrow{AN}, \vec{n}) \right| = \left| \frac{2 \times 2 + 1 \times 2}{\sqrt{5} \times 3} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(3) \text{ 设 } E(x, y, z), \frac{ME}{MN} = \lambda,$$

$$\therefore \overrightarrow{ME} = \lambda \overrightarrow{MN},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{ME} = (x, y, z - 2), \overrightarrow{MN} = (2, 2, -1),$$

$$\therefore E \text{ 点的坐标为 } (2\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda), \because AD \perp \text{面 } MDC, \therefore AD \perp MC,$$

欲使平面 $ADE \perp$ 平面 MNC , 只要 $AE \perp MC$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = (2\lambda - 2, 2\lambda, 2 - \lambda), \overrightarrow{MC} = (0, 2, -2),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{MC} = 0, \therefore 4\lambda - 2(2 - \lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3}, \therefore \frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}.$$

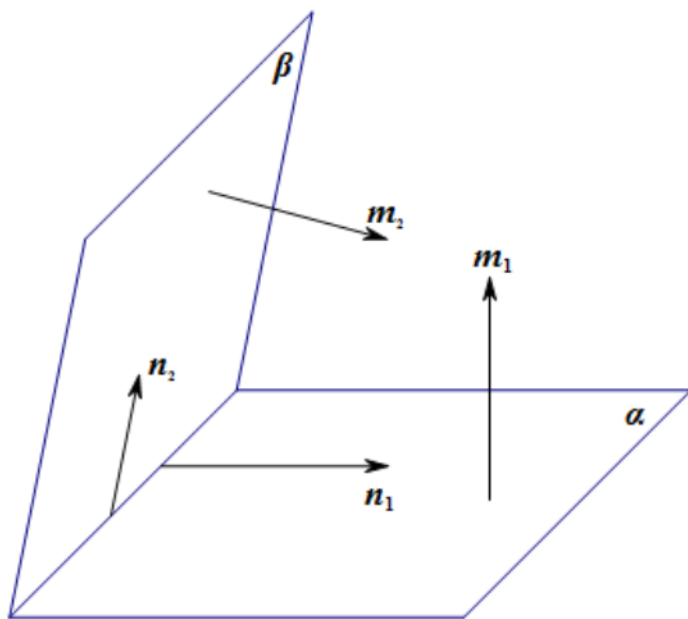
四、二面角

如上图, 在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O , 在两个半平面 α 和 β 内分别作射线 $OA \perp l$, $OB \perp l$, 则 $\angle AOB$ 叫做二面角 $\alpha - l - \beta$ 的**平面角**.

这样, 二面角的大小就完全可以利用平面角来度量; 二面角的取值范围是 $[0, \pi]$; 平面角是直角的二面角叫做**直二面角**.

下面我们利用向量的夹角来研究二面角的求法.

如下图:



分别在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的面 α 、 β 内，作向量 $\vec{n}_1 \perp l$ ， $\vec{n}_2 \perp l$ ，则我们可以用向量 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角来度量二面角。

设 $m_1 \perp \alpha$ ， $m_2 \perp \beta$ ，则 $\langle m_1, m_2 \rangle$ 与该二面角大小相等或互补。

据此，我们将求解二面角的问题转化为求解两个半平面法向夹角的问题。

【补充说明】

利用向量法求解二面角时有两个问题需要注意：一是建系之后两个半平面的法向量求解要正确；二是求出了两个法向量的夹角之后，要结合图形与题意判断所求的是二面角的大小还是其补角的大小。



例4

- 23 已知单位正方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，点 E 为 B_1D_1 中点，以 A 为原点，分别以 AB 、 AD 、 AA_1 为 x 、 y 、 z 轴，建立空间直角坐标系，
- (1) 求直线 AB_1 与 AD_1C_1 所成的角。
 - (2) 求二面角 $B_1 - AD_1 - C_1$ 的大小。

答案

- (1) 答案见解析。
- (2) 答案见解析。

解析

(1) 设直线 AB_1 与平面 AD_1C_1 所成的角为 θ ,

$$\therefore A(0,0,0), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (1,0,1), \overrightarrow{AC_1} = (1,1,1), \overrightarrow{AD_1} = (0,1,1),$$

设平面 AD_1C_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AC_1} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \text{令 } y = 1, \text{ 则 } x = 0, z = -1,$$

$$\therefore \vec{n} = (0, 1, -1),$$

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \theta = 30^\circ$, 即直线 AB_1 与平面 AD_1C_1 所成的角为 30° .

(2) 设平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1, \text{ 则 } y = 1, z = -1,$$

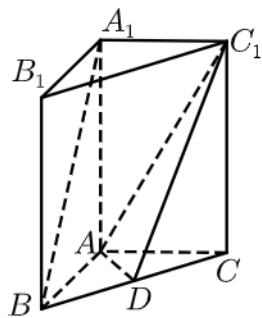
$$\therefore \vec{m} = (1, 1, -1),$$

$\therefore$ 由3知平面 AD_1C_1 的法向量 $\vec{n} = (0, 1, -1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

故二面角 $B_1 - AD_1 - C_1$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

24 如图, 在直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, $AA_1 = 4$, 点 D 是 BC 的中点.



(1) 求异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值.

(2) 求平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成二面角的正弦值.

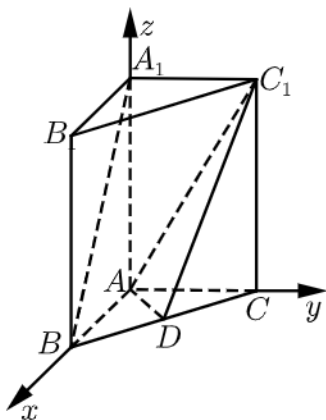
答案

(1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

解析

(1) 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为为基底建立空间直角坐标系 $A - xyz$,



则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $A_1(0,0,4)$, $D(1,1,0)$, $C_1(0,2,4)$,

$$\therefore \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -4), \overrightarrow{C_1D} = (1, -1, -4),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{C_1D} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1D}}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{C_1D}|} = \frac{18}{\sqrt{20} \sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$\therefore$ 异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$ 是平面 ABA_1 的一个法向量,

设平面 ADC_1 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 4),$$

由 $\vec{m} \perp \overrightarrow{AD}$, $\vec{m} \perp \overrightarrow{AC_1}$,

$$\therefore \begin{cases} x + y = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = 1, \text{得 } y = -2, x = 2,$$

$\therefore$ 平面的法向量为 $\vec{m} = (2, -2, 1)$,

设平面 ADC_1 与 ABA_1 所成二面角为 θ ,

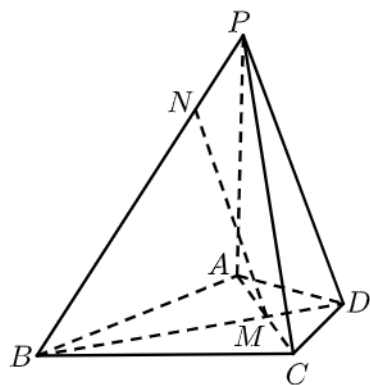
$$\therefore |\cos \theta| = |\cos \langle \overrightarrow{AC}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AC}| |\vec{m}|} = \frac{|-4|}{2 \times 3} = \frac{2}{3},$$

$$\text{得 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$\therefore$ 平面 ADC_1 与 ABA_1 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

练4

25 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ABC$ 是正三角形, AC 与 BD 的交点 M 恰好是 AC 中点, 又 $PA = AB = 4$, $\angle CDA = 120^\circ$, 点 N 在线段 PB 上, 且 $PN = \sqrt{2}$.



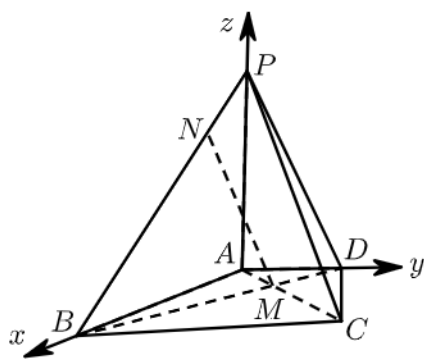
- (1) 求证： $BD \perp PC$ ；
- (2) 求证： $MN \parallel$ 平面 PDC ；
- (3) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.

答案

- (1) 答案见解析
- (2) 答案见解析
- (3) 二面角 $A-PC-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

解析

- (1) 因为 $\triangle ABC$ 是正三角形， M 是 AC 中点，
所以 $BM \perp AC$ ，即 $BD \perp AC$
又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $PA \perp BD$
又 $PA \cap AC = A$ ，所以 $BD \perp$ 平面 PAC
又 $PC \subset$ 平面 PAC ，所以 $BD \perp PC$
- (2) 在正三角形 ABC 中， $BM = 2\sqrt{3}$
在 $\triangle ACD$ 中，因为 M 为 AC 中点， $DM \perp AC$ ，所以 $AD = CD$
 $\angle CDA = 120^\circ$ ，所以 $DM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $BM : MD = 3 : 1$
在等腰直角三角形 PAB 中， $PA = AB = 4$ ， $PB = 4\sqrt{2}$ ，
所以 $BN : NP = 3 : 1$ ， $BN : NP = BM : MD$ ，所以 $MN \parallel PD$
又 $MN \not\subset$ 平面 PDC ， $PD \subset$ 平面 PDC ，所以 $MN \parallel$ 平面 PDC
- (3) 因为 $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ$ ，
所以 $AB \perp AD$ ，分别以 AB, AD, AP 为 x 轴， y 轴， z 轴建立如图的空间直角坐标系，



所以 $B(4, 0, 0)$, $C(2, 2\sqrt{3}, 0)$, $D(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$, $P(0, 0, 4)$

由 (II) 可知,

$\overrightarrow{DB} = (4, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$ 为平面 PAC 的法向量

$\overrightarrow{PC} = (2, 2\sqrt{3}, -4)$, $\overrightarrow{PB} = (4, 0, -4)$

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

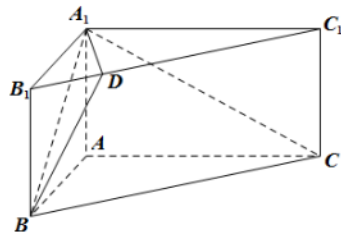
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2x + 2\sqrt{3}y - 4z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases},$$

令 $z = 3$, 则平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (3, \sqrt{3}, 3)$

设二面角 $A-PC-B$ 的大小为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

所以二面角 $A-PC-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

- 26 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{3}$, $AB = 2$, 点 D 在棱 B_1C_1 上, 且 $B_1C_1 = 4B_1D$.



- (1) 求证: $BD \perp A_1C$.
- (2) 求二面角 $B-A_1D-B_1$ 的大小.

答案

- (1) 证明见解析
- (2) 60°

解析

(1) 因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 直三棱柱，

所以 $AA_1 \perp AB$ ， $AA_1 \perp AC$ 。又 $AB \perp AC$ ，

所以 AB ， AC ， AA_1 两两互相垂直。

如图，以 A 为原点，建立空间直角坐标系 $A - xyz$ 。

则 $B(2, 0, 0)$ ， $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ ， $A_1(0, 0, \sqrt{3})$ ，

$B_1(2, 0, \sqrt{3})$ ， $C_1(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 。

由 $\overrightarrow{B_1D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B_1C_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ，得 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ 。

所以 $\overrightarrow{BD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ， $\overrightarrow{A_1C} = (0, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 。

因为 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 3 - 3 = 0$ ，所以 $BD \perp A_1C$ 。

(2) $\overrightarrow{BD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ ， $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -\sqrt{3})$ 。

设平面 A_1DB 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ ，

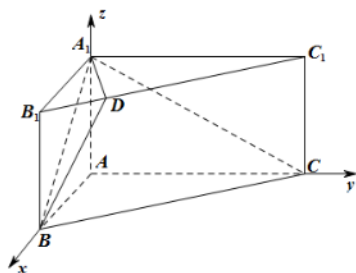
所以 $\begin{cases} 2x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}$ ，取 $z_1 = 1$ ，得 $\vec{m} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ 。

又平面 A_1DB_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ，

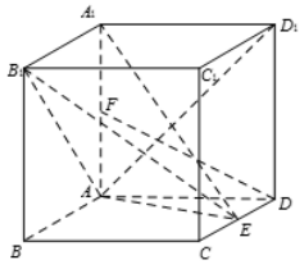
所以 $\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1}} = \frac{1}{2}$ ，

因为二面角 $B - A_1D - B_1$ 的平面角是锐角，

所以二面角 $B - A_1D - B_1$ 的大小是 60° 。



27 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = AD = 1$ ， E 为 CD 的中点， F 为 AA_1 的中点。



(1) 求证： $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1E ；

(2) 求证： $DF \parallel$ 平面 AB_1E ；

(3) 若二面角 $A - B_1E - A_1$ 的大小为 45° ，求 AB 的长。

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .
 (3) 1 .

解析

- (1) 证明：在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，
 因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 A_1ADD_1 ，
 所以 $A_1B_1 \perp AD_1$.
 因为 $AA_1 = AD$ ，所以四边形 ADD_1A_1 为正方形，
 因此 $AD_1 \perp A_1D$ ，
 又 $A_1B_1 \cap A_1D = A_1$ ，所以 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1D .
 又 $A_1B_1 // CD$ ，且 $A_1B_1 = CD$ ，
 所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形 .
 又 E 在 CD 上，所以 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1E .
- (2) 取 AB_1 的中点为 N ，连接 NF .
 因为 F 为 AA_1 的中点，所以 $NF // \frac{1}{2}A_1B_1$ 且 $NF = \frac{1}{2}A_1B_1$ ，
 因为 E 为 CD 的中点，所以 $DE = \frac{1}{2}CD$ ，
 而 $CD // A_1B_1$ ，且 $CD = A_1B_1$ ，
 所以 $NF // DE$ ，且 $NF = DE$ ，
 因此四边形 $NEDF$ 为平行四边形，
 所以 $DF // EN$ ，而 $EN \subset$ 平面 AB_1E ，
 所以 $DF //$ 平面 AB_1E .
- (3) 如图，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A - xyz$ ，设 $AB = a$ ，
 则 $A(0, 0, 0)$ ， $D(0, 1, 0)$ ， $D_1(0, 1, 1)$ ， $E(\frac{a}{2}, 1, 0)$ ， $B_1(a, 0, 1)$ ，
 故 $\overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{AB_1} = (a, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{AE} = (\frac{a}{2}, 1, 0)$.
 由(1)可知 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1E ，
 所以 $\overrightarrow{AD_1}$ 是平面 A_1B_1E 的一个法向量 .
 设平面 AB_1E 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，
 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$ ， $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ ，
 所以 $\begin{cases} ax + z = 0 \\ \frac{a}{2}x + y = 0 \end{cases}$ ，

令 $x = 1$, 则 $y = -\frac{a}{2}, z = -a$,

所以 $\vec{n} = (1, -\frac{a}{2}, -a)$.

设 $\vec{AD_1}$ 与 $\vec{n}$ 所成的角为 θ , 则

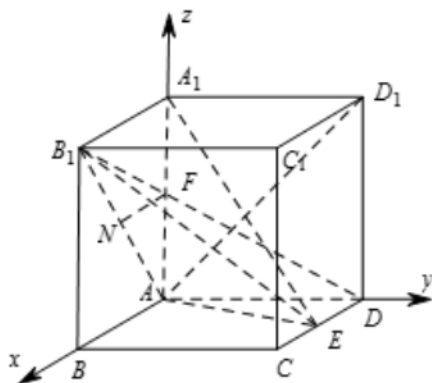
$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{AD_1}}{|\vec{n}| |\vec{AD_1}|} = \frac{-\frac{a}{2} - a}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} + a^2}}.$$

因为二面角 $A - B_1E - A_1$ 的大小为 45° ,

所以 $|\cos \theta| = \cos 45^\circ$, 即

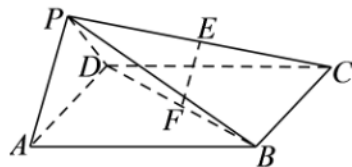
$$\frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{5a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $a = 1$, 即 AB 的长为 1.



28 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且

$PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$, E 、 F 分别为 PC 、 BD 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD .

(2) 求证: 面 $PAB \perp$ 平面 PDC .

(3) 在线段 AB 上是否存在点 G , 使得二面角 $C - PD - G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$? 说明理由.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 在线段 AB 上存在点 $G(1, \frac{1}{2}, 0)$, 使得二面角 $C - PD - G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

解析

(1) 证明: 连结 $AC \cap BD = F$, $ABCD$ 为正方形, F 为 AC 中点,

E 为 PC 中点. $\therefore$ 在 $\triangle CPA$ 中, $EF \parallel PA$.

且 $PA \subset$ 平面 PAD , $EF \not\subset$ 平面 $PAD \therefore EF \parallel PAD$.

(2) 证明: 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$.

$ABCD$ 为正方形, $CD \perp AD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $CD \perp$ 平面 PAD .

$\therefore CD \perp PA$

又 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$, 所以 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形 ,

且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$, 即 $PA \perp PD$

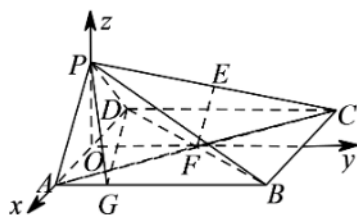
又 $CD \cap PD = D$, 且 $CD, PD \subset$ 面 PDC ,

$\therefore PA \perp$ 面 PDC .

又 $PA \subset$ 面 PAB ,

$\therefore$ 面 $PAB \perp$ 面 PDC .

(3) 如图 , 取 AD 的中点 O , 连结 OP, OF .



$\because PA = PD$, $\therefore PO \perp AD$.

$\because$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,

而 O, F 分别为 AD, BD 的中点 , $\therefore OF \parallel AB$, 又 $ABCD$ 是正方形 , 故 $OF \perp AD$.

$\because PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$, $\therefore PA \perp PD$, $OP = OA = 1$.

以 O 为原点 , 直线 OA, OF, OP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 ,

则有 $A(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$.

若在 AB 上存在点 G , 使得二面角 $C - PD - G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 连结 PG, DG .

设 $G(1, a, 0) (0 \leq a \leq 2)$.

由 (II) 知平面 PDC 的法向量为 $\vec{PA} = (1, 0, -1)$.

设平面 PGD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$. $\because \vec{DP} = (1, 0, 1), \vec{GD} = (-2, -a, 0)$,

$\therefore$ 由 $\vec{n} \cdot \vec{DP} = 0, \vec{n} \cdot \vec{GD} = 0$ 可得 $\begin{cases} x + 0 \cdot y + z = 0 \\ -2 \cdot x - a \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则

$y = -\frac{2}{a}, z = -1$,

故 $\vec{n} = (1, -\frac{2}{a}, -1)$. $\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{PA} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PA}}{|\vec{n}| |\vec{PA}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \frac{4}{a^2}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \frac{4}{a^2}}} = \frac{1}{3}$,

解得 , $a = \frac{1}{2}$.

所以 , 在线段 AB 上存在点 $G(1, \frac{1}{2}, 0)$, 使得二面角 $C - PD - G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

