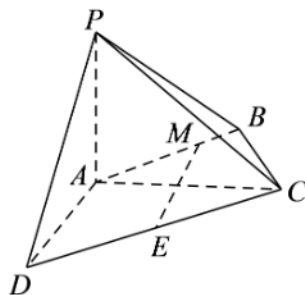


立体几何与空间向量综合习题

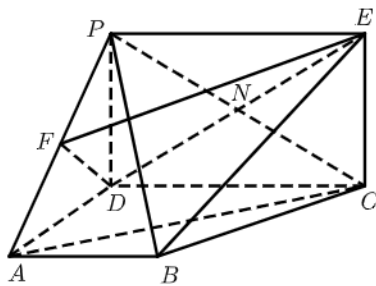
一、空间中的角度

- 1 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp AD$, $AB \perp BC$, $\angle BCA = 60^\circ$, $AP = AC = AD = 2$, E 为 CD 的中点, M 在 AB 上, 且 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.



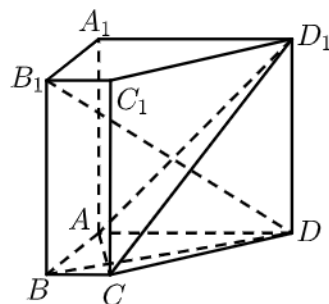
- (1) 求证: $EM \parallel$ 平面 PAD .
- (2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.
- (3) 点 F 是线段 PD 上异于两端点的任意一点, 若满足异面直线 EF 与 AC 所成角 45° , 求 AF 的长.

- 2 如图, PD 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面, $\angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$. F 为 PA 中点, $PD = \sqrt{2}$, $AB = AD = \frac{1}{2}CD = 1$. 四边形 $PDCE$ 为矩形, 线段 PC 交 DE 于点 N .



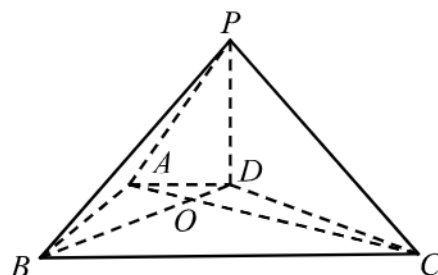
- (1) 求证: $AC \parallel$ 平面 DEF ;
- (2) 求二面角 $A-BC-P$ 的大小;
- (3) 在线段 EF 上是否存在一点 Q , 使得 BQ 与平面 BCE 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$? 若存在, 请求出 FQ 的长; 若不存在, 请说明理由.

- 3 如图, 在直棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 $AD // BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BD$, $BC = 1$, $AD = AA_1 = 3$.



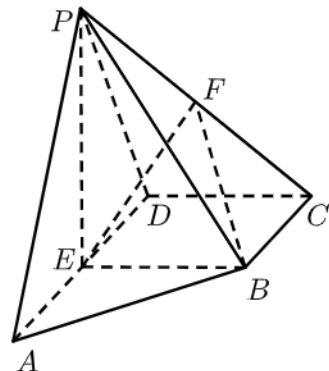
- (1) 证明: $AC \perp B_1D$;
- (2) 求直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值.

- 4 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P - ABCD$ 中, $AD // BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD = 1$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$.



- (1) 求证: $BD \perp PC$.
- (2) 求直线 AB 与平面 PDC 所成的角.
- (3) 设点 E 在棱 PC 上, $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 若 $DE //$ 平面 PAB , 求 λ 的值.

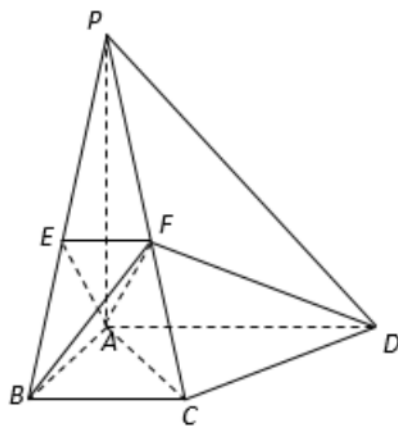
- 5 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $ABCD$ 为直角梯形, $BC // AD$, $\angle ADC = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$, $PA = PD$, E, F 为 AD, PC 的中点.



- (1) 求证: $PA //$ 平面 BEF ;

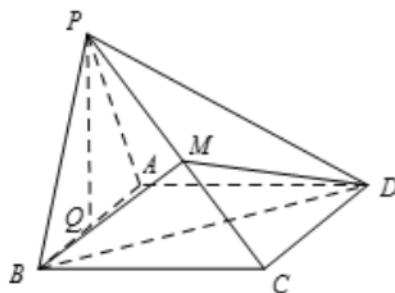
- (2) 若 PC 与 AB 所成角为 45° ，求 PE 的长；
 (3) 在 (II) 的条件下，求二面角 $F - BE - A$ 的余弦值。

- 6 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA \perp AC$ ， $PA = AD = 2$ 。四边形 $ABCD$ 满足 $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = BC = 1$ 。点 E, F 分别为侧棱 PB, PC 上的点，且 $\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} = \lambda$ 。



- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 PAD ；
 (2) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，求异面直线 BF 与 CD 所成角的余弦值；
 (3) 是否存在实数 λ ，使得平面 $AFD \perp$ 平面 PCD ？若存在，试求出 λ 的值；若不存在，请说明理由。

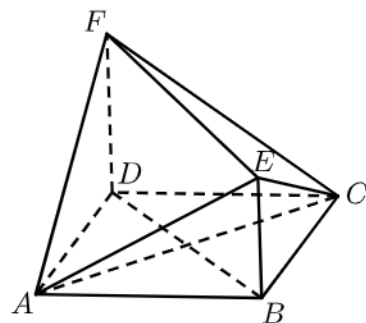
- 7 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，侧面 PAB 是边长为 2 的正三角形，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ 。



- (1) 设 AB 的中点为 Q ，求证： $PQ \perp$ 平面 $ABCD$ ；
 (2) 求斜线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值；
 (3) 在侧棱 PC 上存在一点 M ，使得二面角 $M - BD - C$ 的大小为 60° ，求 $\frac{CM}{CP}$ 的值。

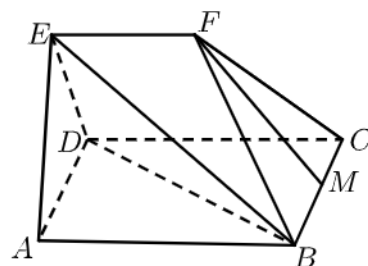
二、空间中的距离

- 8 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $DF = 2BE = 2$ ， $BE \parallel DF$ ， $FC = AF = 2\sqrt{2}$ 。



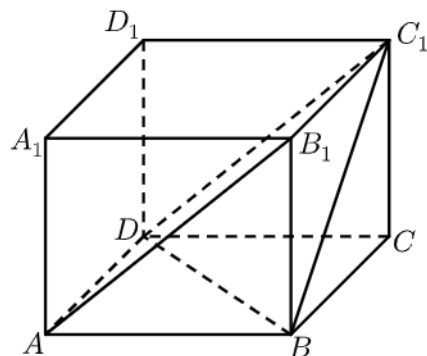
- (1) 求证：平面 $ACE \perp$ 平面 $BDFE$ 。
- (2) 求点 F 到平面 ACE 的距离。

- 9 在如图所示的五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$ ， $EA = ED = AB = 2EF = 2$ ， $EF \parallel AB$ ， M 为 BC 的中点。



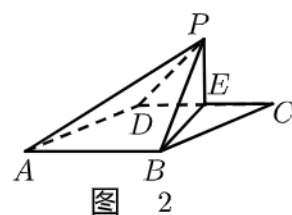
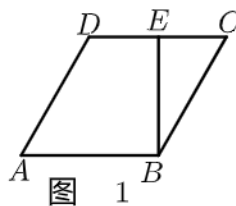
- (1) 求证： $FM \parallel$ 平面 BDE 。
- (2) 若平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ ，求点 F 到平面 BDE 的距离。

- 10 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长 $AB = \sqrt{3}$ ， $AA_1 = 1$ ，截面 AB_1C_1D 为正方形。



- (1) 求异面直线 BC_1 与 AD 所成角的大小 .
- (2) 求点 B_1 到平面 DBC_1 的距离 .
- (3) 求二面角 $B_1 - C_1D - B$ 的大小 .

11 如图1, 四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, E 为 CD 的中点, 以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起到 $\triangle PBE$ 的位置, 使得平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$, 如图2 .



- (1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBE .
- (2) 求点 D 到平面 PAB 的距离 .