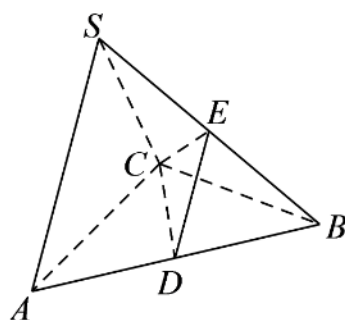


# 立体几何与空间向量综合

## 一、空间中的角度

### 例1

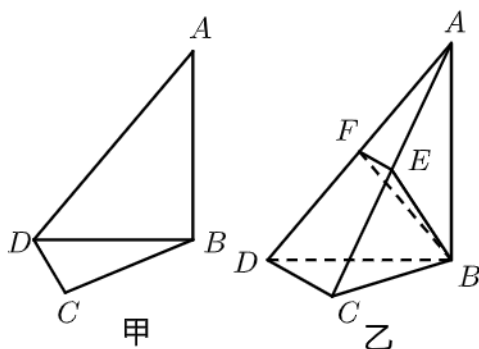
- 1 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 $ABC$ 是正三角形， $AB=4$ ， $SA=SC=2\sqrt{3}$ ，侧面 $SAC\perp$ 底面 $ABC$ ， $D$ ， $E$ 分别为 $AB$ ， $SB$ 的中点。



- (1) 求证： $AC\perp SB$ 。
- (2) 求直线 $SC$ 与平面 $ECD$ 所成角的正弦值。
- (3) 求二面角 $E-CD-B$ 的余弦值。

### 练1

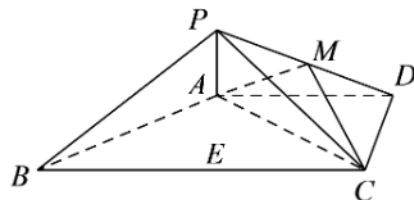
- 2 如图甲，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A=45^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle ADC=105^\circ$ ， $AB=BD$ ，现将四边形 $ABCD$ 沿 $BD$ 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 $BDC$ （如图乙），设点 $E$ 、 $F$ 分别为棱 $AC$ 、 $AD$ 的中点。



- (1) 求证： $DC\perp$ 平面 $ABC$ 。

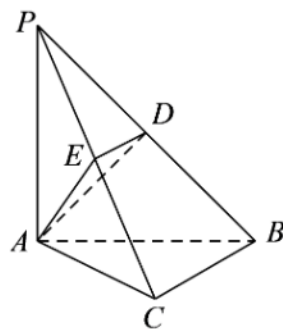
- (2) 求  $BF$  与平面  $ABC$  所成角的正弦.
- (3) 求二面角  $B-EF-A$  的余弦.

- 3 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp CD$ , 且  $AD = CD = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 4\sqrt{2}$ ,  $PA = 2$ , 点  $M$  在  $PD$  上.



- (1) 求证:  $AB \perp PC$ .
- (2) 求异面直线  $PB$  与  $DC$  所成角的余弦值.
- (3) 若二面角  $M-AC-D$  的平面角的大小为  $45^\circ$ , 求直线  $BM$  与平面  $PAC$  所成角的正弦值.

- 4 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC$ , 点  $D, E$  分别在棱  $PB, PC$  上,  $PA = AB = 2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 90^\circ$ , 且  $DE \parallel BC$ .

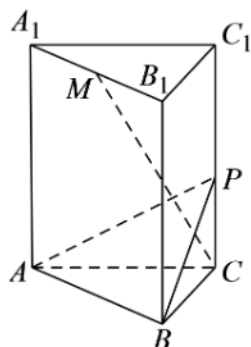


- (1) 求证:  $BC \perp$  平面  $PAC$ .
- (2) 当点  $D$  为  $PB$  的中点时, 求  $AD$  与平面  $PAC$  所成角的正切值.
- (3) 是否存在点  $E$  使得二面角  $A-DE-P$  为直二面角? 并说明理由.

## 二、动点问题

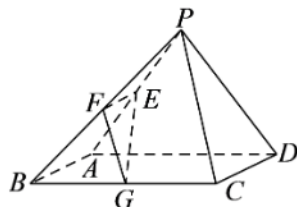
### 例2

如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为4正三角形， $AA_1 \perp$ 平面 $ABC$ ， $AA_1 = 2\sqrt{6}$ ， $M$ 为 $A_1B_1$ 的中点。



- (1) 求证： $MC \perp AB$ 。
- (2) 在棱 $CC_1$ 上是否存在点 $P$ ，使得 $MC \perp$ 平面 $ABP$ ？若存在，确定点 $P$ 的位置；若不存在，说明理由。
- (3) 若点 $P$ 为 $CC_1$ 的中点，求二面角 $B - AP - C$ 的余弦值。

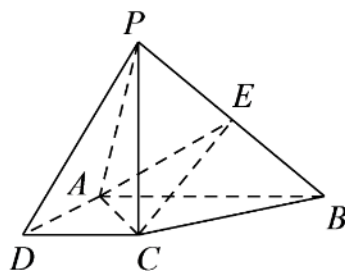
- 6 已知在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为4的正方形， $\triangle PAD$ 是正三角形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $E, F, G$ 分别是 $PA, PB, BC$ 的中点。



- (1) 求证： $EF \perp$ 平面 $PAD$ 。
- (2) 求平面 $EFG$ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的大小。
- (3) 线段 $PD$ 上是否存在一个动点 $M$ ，使得直线 $GM$ 与平面 $EFG$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$ ，若存在，求线段 $PM$ 的长度，若不存在，说明理由。

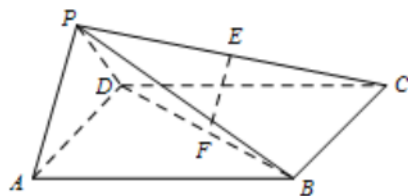
练2

- 7 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB = 2AD = 2CD = 4$ ， $PC = 2a$ ， $E$ 是 $PB$ 的中点。



- (1) 求证：平面  $EAC \perp$  平面  $PBC$  .
- (2) 若二面角  $P-AC-E$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求直线  $PA$  与平面  $EAC$  所求角的正弦值 .

- 8 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形，侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$ ， $E, F$  分别为  $PC, BD$  的中点 .



- (1) 求证： $EF \parallel$  平面  $PAD$ ；
- (2) 求证：面  $PAB \perp$  平面  $PDC$ ；
- (3) 在线段  $AB$  上是否存在点  $G$ ，使得二面角  $C-PD-G$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ？说明理由 .

### 三、空间中的距离

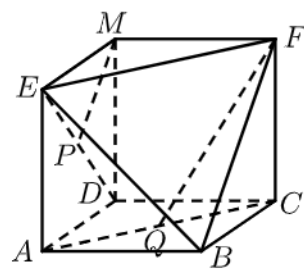
过空间不在平面  $\alpha$  内一点  $O$  做平面  $\alpha$  的垂线，垂足为  $A$ ，另过  $O$  作  $OB$  交  $\alpha$  于  $B$ ，且  $OA$  与  $OB$  不

重合，设平面  $\alpha$  的法向量为  $\vec{m}$ ， $OB$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $\theta$ ，则  $\sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}| |\vec{OB}|}$ ，于是点  $O$  到平

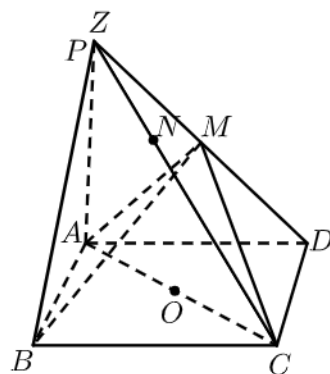
面  $\alpha$  的距离  $|OA| = |\vec{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}|}$

#### 例3

- 9 如图所示，已知四边形  $ABCD$ 、 $EADM$  和  $MDCF$  都是边长为  $a$  的正方形，点  $P, Q$  分别是  $ED$  和  $AC$  的中点 . 求： $P$  点到平面  $EFB$  的距离 .



- 10 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AD = 4$ ， $AB = 2$ 。  
以  $AC$  的中点  $O$  为球心、 $AC$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ ，交  $PC$  于点  $N$ 。

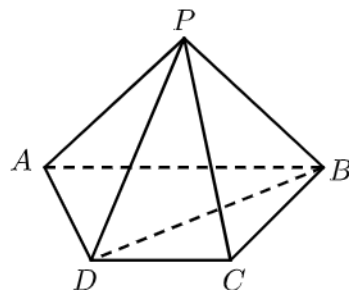


- (1) 求证：平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ；
- (2) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的正弦值；
- (3) 求点  $N$  到平面  $ACM$  的距离。



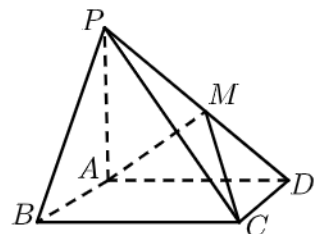
练3

- 11 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，侧面  $PAB$  是等腰直角三角形， $PA = PB$ ， $BC \perp$  平面  $PAB$ ，  
 $AB = BC = 2$ ， $AD = BD = \sqrt{5}$ 。



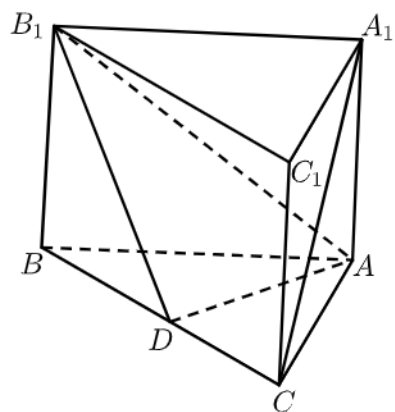
- (1) 求证： $PA \perp$  平面  $PBC$ 。
- (2) 求顶点  $C$  到平面  $PAD$  的距离。

- 12 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AD = 4$ ， $AB = 2$ ， $M$  是  $PD$  中点。



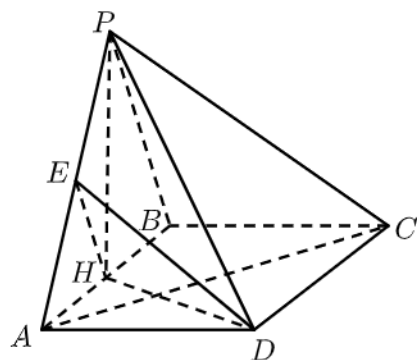
- (1) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的正弦值。
- (2) 求点  $P$  到平面  $ACM$  的距离。

- 13 如图，在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $D$  是  $BC$  的中点，且  $AD \perp BC$ ，四边形  $ABB_1A_1$  为正方形。



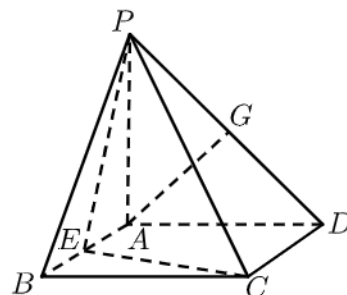
- (1) 求证： $A_1C \parallel$  平面  $AB_1D$ 。
- (2) 若  $\angle BAC = 60^\circ$ ， $BC = 4$ ，求点  $A_1$  到平面  $AB_1D$  的距离。

- 14 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是矩形，侧面  $PAB$  是正三角形， $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{2}$ ， $PC = \sqrt{6}$ 。E、H 分别为  $PA$ 、 $AB$  的中点。



- (1) 求证： $PH \perp AC$ 。
- (2) 求点  $P$  到平面  $DEH$  的距离。

- 15 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形， $PA = AB = 2$ ， $E$ 是 $AB$ 的中点， $G$ 是 $PD$ 的中点。



- (1) 求证： $AG \parallel$ 平面 $PEC$ 。
- (2) 求证：平面 $PCD \perp$ 平面 $PEC$ 。
- (3) 求点 $D$ 到面 $PEC$ 的距离。