

二面角与空间距离

一、二面角的定义及求法

1. 知识讲解



二面角定义与范围

(1) 二面角的概念

① 半平面: 平面内的一条直线把平面分成两部分, 这两部分通常叫做半平面.

② 二面角: 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫做二面角的棱, 这两个半平面叫做二面角的面.

(2) 二面角的表示

① 棱为 l , 面分别为 α, β 的二面角记作二面角 $\alpha - l - \beta$, 如图a.

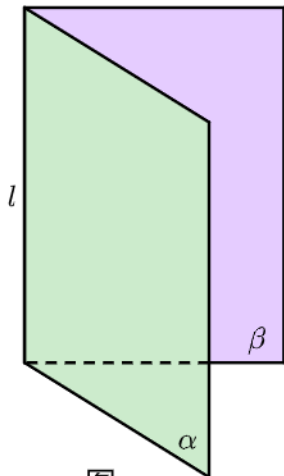


图 a

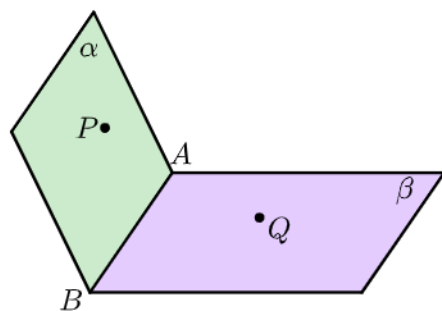
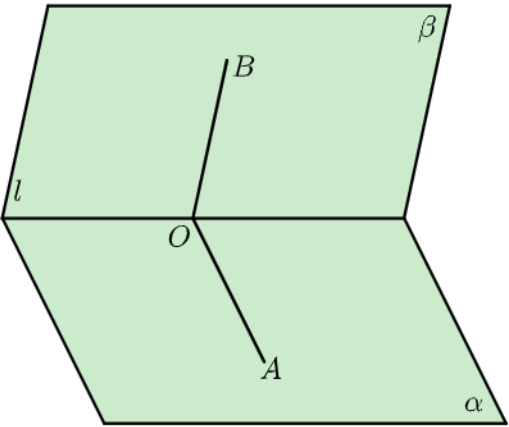


图 b

② 棱为 AB , 面分别为 α, β 的二面角记作二面角 $\alpha - AB - \beta$, 如图b.

③ 若在 α, β 面内分别取不在棱上的点 P, Q , 这个二面角可记作二面角 $P - AB - Q$, 如图b.

(3)二面角的平面角

文字语言	以二面角棱上任意一点为端点，在两半平面内分别作垂直于棱的两条射线，则这两条射线所成的角叫做二面角的平面角
符号语言	$\alpha \cap \beta = l, O \in l, OA \subset \alpha, OB \subset \beta, OA \perp l, OB \perp l, OB \perp l \Rightarrow \angle AOB$ 为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角
图形语言	

(4)二面角大小的度量

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

(5)二面角的范围

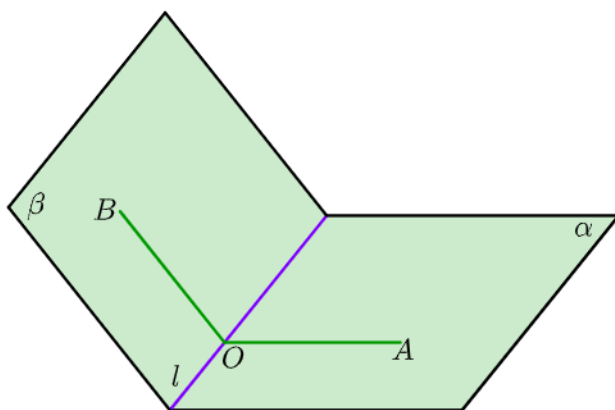
当二面角的两个半平面重合时，规定二面角的大小是 0° ;当二面角的两个半平面合成一个平面时，规定二面角的大小是 180° ，所以二面角的平面角 α 的范围是 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

二面角的求法

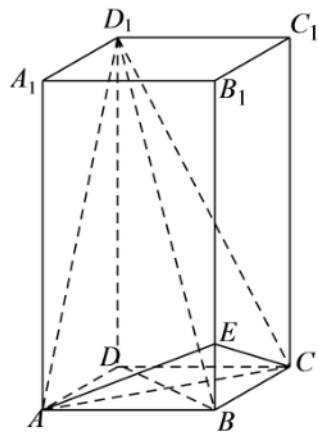
2. 例题精讲

定义法

在二面角的棱上任找一点，在两个半平面内分别作垂直于棱的射线，所构成的角为二面角的平面角.如图， $\angle AOB$ 即为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角.



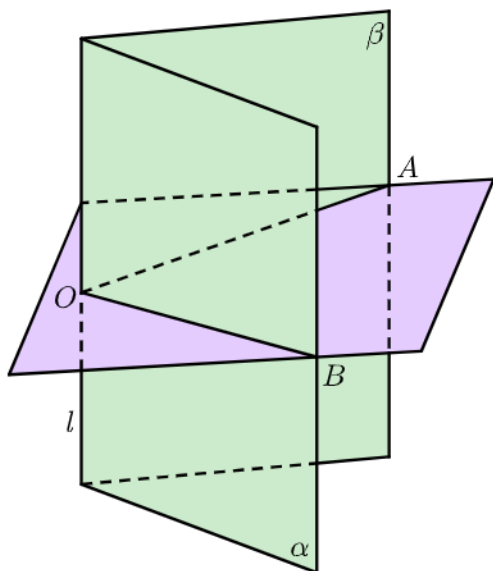
1 已知长方体 AC_1 中，棱 $AB = BC = 1$ ，棱 $BB_1 = 2$ ，点 E 为棱 BB_1 上的点.



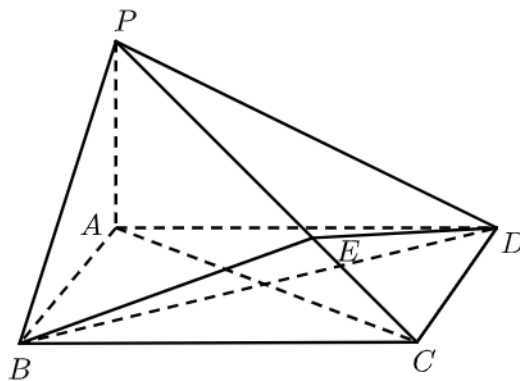
- (1) 求证： $AC \perp BD_1$.
- (2) 求证：平面 $D_1DB \perp$ 平面 ACE .
- (3) 若 $BE = \frac{1}{4}BB_1$ ，求平面 ACE 与平面 ACD_1 所成角的余弦值.

垂面法

过棱上一点作与该棱垂直的平面，该平面与二面角的两个半平面相交，得两条交线，这两条交线所成的角即为二面角的平面角.如图， $\angle AOB$ 即为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角.



- 2 如图5所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 E 在线段 PC 上， $PC \perp$ 平面 BDE 。

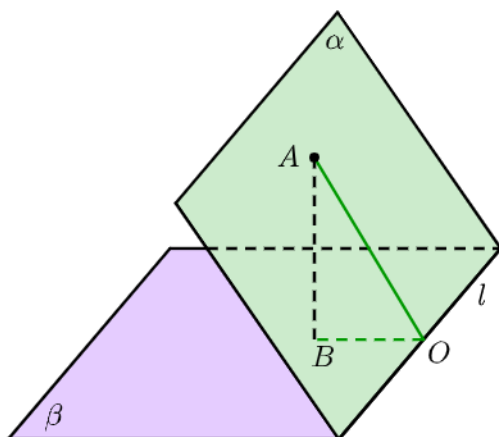


- (1) 证明： $BD \perp$ 平面 PAC ；
- (2) 若 $PA = 1$ ， $AD = 2$ ，求二面角 $B-PC-A$ 的正切值。



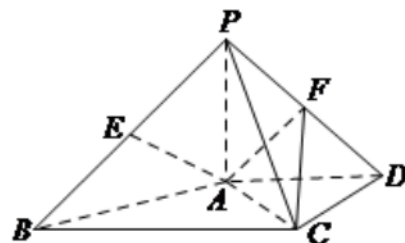
垂线法 (三垂线定理法)

过二面角的一个半平面内一点(不在棱上)作另一个半平面所在平面的垂线,从垂足出发向棱引垂线,利用三垂线定理即可找到所求二面角的平面角或其补角.如图, $\angle AOB$ 即为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角.



3

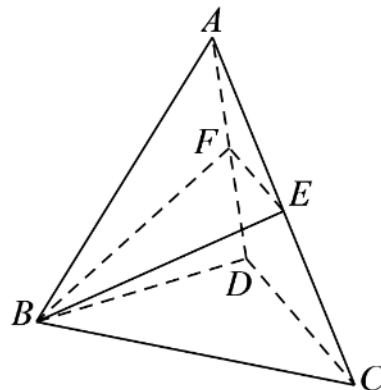
如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$,且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$, $BC = 4\sqrt{2}$.



- (1) 若 E 为 PB 的中点,证明: $AE \parallel$ 平面 PCD .
- (2) 求证: $AB \perp PC$.
- (3) 若 F 为 PD 的中点,求二面角 $F-AC-D$ 的平面角的大小.

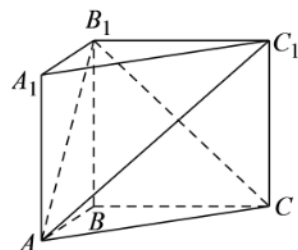
3. 课堂巩固

4 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $BA = BD$ ， $AD \perp CD$ ，点 E 、 F 分别为 AC 、 AD 的中点。



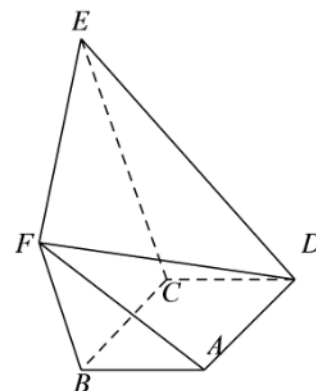
- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 BCD 。
- (2) 求证：平面 $EFB \perp$ 平面 ABD 。
- (3) 若 $BC = BD = CD = AD = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，求二面角 $B - AD - C$ 的余弦值。

- 5 如图，已知在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $B_1B \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $AB = BC = BB_1 = 2$ 。



求二面角 $C_1 - AB_1 - C$ 的余弦值。

- 6 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $BCEF$ 为直角梯形， $BF \parallel CE$ ， $BF \perp BC$ ， $BF < CE$ ，
 $BF = 2$ ， $AB = 1$ ， $AD = \sqrt{5}$ 。



若二面角 $E - BC - A$ 的大小为 120° ，求直线 DF 与平面 $ABCD$ 所成的角。

二、空间距离的求法

(1) 点到平面的距离

从平面外一点引一个平面的垂线，这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离。

(2) 直线和平面间的距离

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离叫做这条直线和平面间的距离。

(3) 平行平面间的距离

和两个平行平面同时垂直的直线，叫做这两个平行平面的公垂线，公垂线夹在两个平行平面间的部分叫做这两个平行平面的公垂线段。两个平行平面的公垂线段的长度叫做这两个平行平面间的距离。

(4) 异面直线间的距离与两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线。两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度叫做两条异面直线间的距离。

任意两条确定的异面直线都存在唯一的公垂线段。



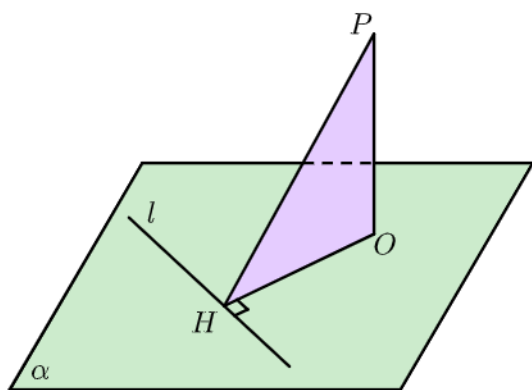
求点线距离的常用方法

(1) 直接法

直接由点向直线作垂线，然后在三角形中利用等面积法求出。

(2) 间接法

如图，先作 $PO \perp \alpha$ 于 O ，再作 $OH \perp l$ 于 H ，连接 PH ，可得 $PH \perp l$ ，则 PH 的长即为点 P 到直线 l 的距离。



1. 例题精讲

7 到两互相垂直的异面直线的距离相等的点 () .

- A. 只有1个 B. 恰有3个 C. 恰有4个 D. 有无穷多个



求点面距离常用的方法

(1)直接利用定义

①找到(或作出)表示距离的线段;

②解线段所在的三角形.

(2)利用两平面互相垂直的性质

如果已知点在已知平面的垂面上, 则已知点到两平面交线的距离就是所求的点面距离.

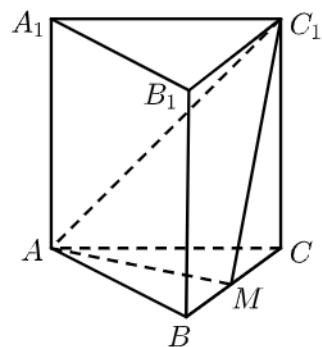
(3)等体积法

步骤:①在平面内选取适当的三点和已知点构成三棱锥;②求出此三棱锥的体积 V 和所取三点构成的三角形的面积 S ;③由 $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ 求出 h .这种方法的3优点是不必作出垂线即可求点面距离, 难点在于如何构造合适的三棱锥以便于计算.

2. 例题精讲

8 11. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 2$, $AB \subset$ 平面 α , 平面 ABC 与 α 所成角为 30° , 则 C 到平面 α 的距离为 ____ .

- 9 如图所示，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a ，点 M 在边 BC 上， $\triangle AMC_1$ 是以点 M 为直角的顶点的等腰直角三角形．求点 C 到平面 AMC_1 的距离．



求线到面、面到面的距离的方法

(1) 线到面的距离

在直线上任取一点转化为点到面的距离.

(2) 面到面的距离

转化为点到面的距离(同线面距离).

3. 例题精讲

- 10 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2$ ， $CC_1 = 2\sqrt{2}$ ， E 为 CC_1 的中点，则直线 AC_1 与平面 BED 的距离为 () .

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

4. 课堂巩固

- 11 如图4所示， P 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BA = 3$ ， $AC = PA = 4$ ，点 A 到平面 PBC 的距离为 _____ .

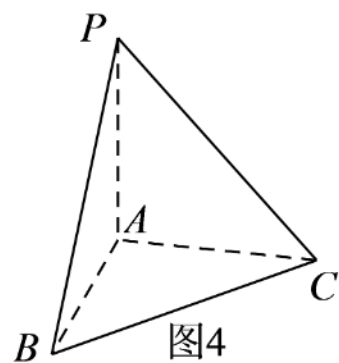
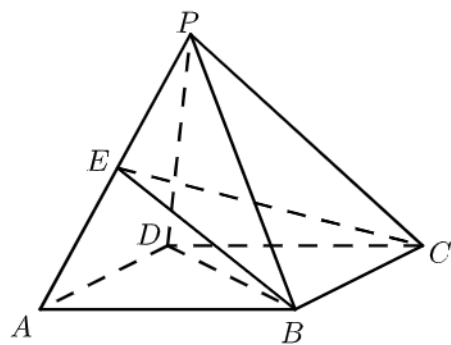


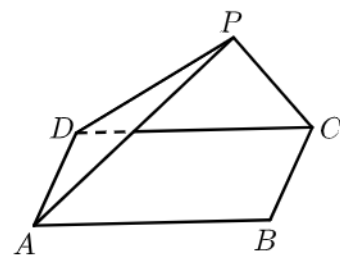
图4

- 12 如图，四棱锥 $PABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，已知 $PB = PD = 2$ ， $PA = \sqrt{6}$ 。



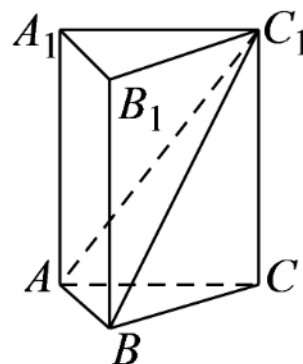
- (1) 证明： $PC \perp BD$ 。
- (2) 若 E 为 PA 的中点，求三棱锥 $P - BCE$ 的体积。

- 13 如图，在三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直， $PD = PC = 4$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$ 。



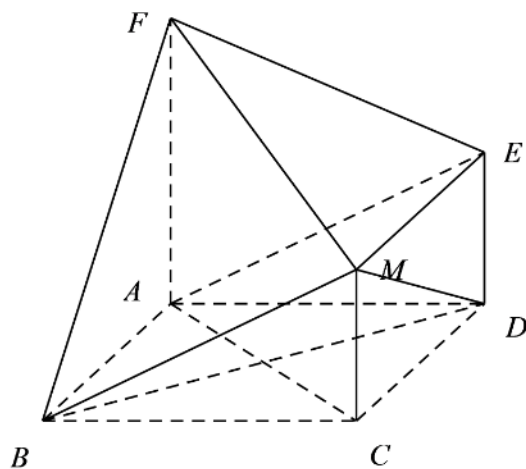
求点 C 到平面 PDA 的距离。

- 14 如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 1$ 。若二面角 $C - AB - C_1$ 的大小为 60° ，则点 C 到平面 ABC_1 的距离为（ ）。



- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

- 15 在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为正方形， $ED \parallel FA$ ， $ED \perp DA$ ，平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $MC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $ED = MC$ ， $AF = AB = 2$ 。



求三棱锥 $F - AME$ 的体积。

- 16 如图，在三棱锥 $P - ABC$ 中， $\angle ABC = \angle PBC = 90^\circ$ ， $\triangle PAB$ 是边长为1的正三角形，若 $BC = 1$ ， M 是 PC 的中点，则点 M 到直线 AB 的距离是 _____。

