

立体几何综合问题练习题

一、立体几何综合问题

1 下列说法正确的是 () .

- A. 若直线 a 与平面 α 内无数条直线平行, 则 $a//\alpha$
- B. 平行四边形的直观图是平行四边形
- C. 经过一条直线和一个点确定一个平面
- D. 如果两个平面平行, 那么在这两个平面内的两条直线平行

答案 B

解析 A选项: a 与 α 可能存在关系: $a \subset \alpha$, 故A错误;

B选项: 平行且相等的一组线段在直观图中仍然平行且相等, 所以直观图仍然是平行四边形, 故B正确;

C选项: 直线和直线外一点才能确定一个平面, 故C错误;

D选项: 两平面平行, 那么在这两平面内的两条直线平行或异面, 故D错误.

故选B.

2 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下面四个命题:

- ①若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \gamma$;
- ②若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \perp n$;
- ③若 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m // n$;
- ④若 $\alpha // \beta, \gamma \cap \alpha = m, \gamma \cap \beta = n$, 则 $m // n$.

其中正确命题的序号是 () .

- A. ①④
- B. ①②
- C. ④
- D. ②③④

答案 C

解析 面面平行的性质定理：如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行。

3 l, m, n 表示不同的直线， α, β, γ 表示不同的平面，给出下列四个命题：

- ①若 $m//l$ ，且 $m \perp \alpha$ ，则 $l \perp \alpha$ ；
- ②若 $m//l$ ，且 $m//\alpha$ ，则 $l//\alpha$ ；
- ③若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $\beta \cap \gamma = m$ ， $\gamma \cap \alpha = n$ ，则 $l//m//n$ ；
- ④若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $\beta \cap \gamma = l$ ， $\gamma \cap \alpha = n$ 且 $n//\beta$ ，则 $l//m$ 。

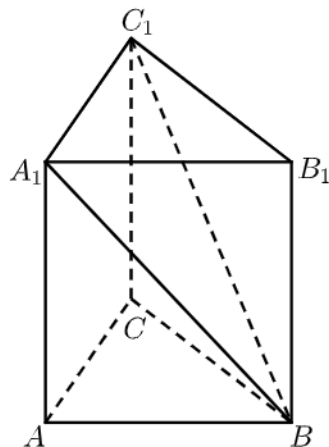
其中正确命题的个数是 ()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 B

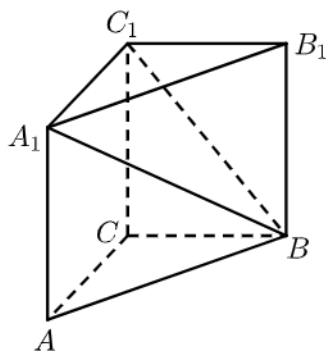
解析 ① $\because m//l, m \perp \alpha, \therefore l \perp \alpha$ ，故①为真命题；
 ②由 $m//l, m//\alpha$ 可得 $l \subset \alpha$ 或 $l//\alpha$ ，故②为假命题；
 ③例如 α, β, γ 是三棱锥的三个侧面，则三个平面彼此的交线是三棱锥的三条棱，显然三条棱是不平行的，故③为假命题；
 ④ $\because n//\beta, \alpha \cap \beta = m, \therefore m//n$ ，
 同理可得 $l//n, \therefore l//m$ ，故④为真命题。

4 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = 2$ ， $AC = BC = 1$ ，则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值是 _____。



答案 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析 连接 BC_1 ,



$\therefore AC // A_1C_1$,

$\therefore \angle C_1A_1B$ 是异面直线 A_1B 与 AC 所成角 (或所成角的补角) ,

$\therefore$ 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 ,

$\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = 2$, $AC = BC = 1$,

$\therefore AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $A_1B = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$,

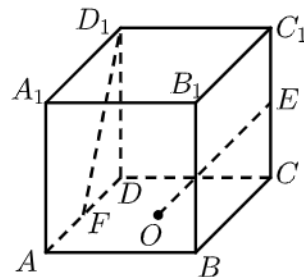
$B_1C = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $A_1C_1 = 1$,

$\therefore \cos \angle C_1A_1B = \frac{A_1C_1^2 + A_1B^2 - B_1C^2}{2 \times A_1C_1 \times A_1B}$,

$= \frac{1+6-5}{2 \times 1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore$ 异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

- 5 如图, 在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中点, E 、 F 分别是 CC_1 、 AD 的中点, 那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 () .



- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
C. $\frac{4}{5}$

- B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$
D. $\frac{2}{3}$

答案 B

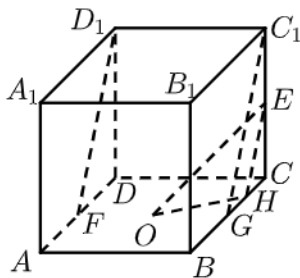
解析 取 BC 中点为 G ，连结 GC_1 ，

则 $GC_1 // FD_1$ ，

再取 GC_1 ，

则 $GC_1 // FD_1$ ，

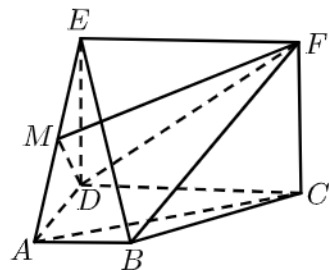
再取 GC 中点为 H ，连结 HE 、 OH ，



则 $\angle OEH$ 为异面直线所成的角. 在 $\triangle OEH$ 中， $OE = \sqrt{3}$ ， $HE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $OH = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

由余弦定理，可得 $\cos \angle OEH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

6 如图，已知矩形 $CDEF$ 和直角梯形 $ABCD$ ， $AB // CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $DE = DA$ ， M 为 AE 的中点。



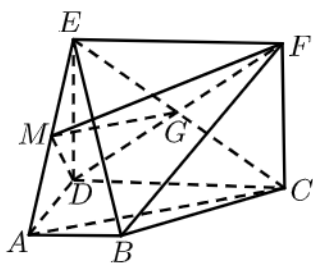
(1) 求证： $AC // \text{平面} DMF$ 。

(2) 求证： $BE \perp DM$ 。

答案 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

解析 (1) 连接 EC ，设 $EC \cap DF = G$ ，连接 MG ，

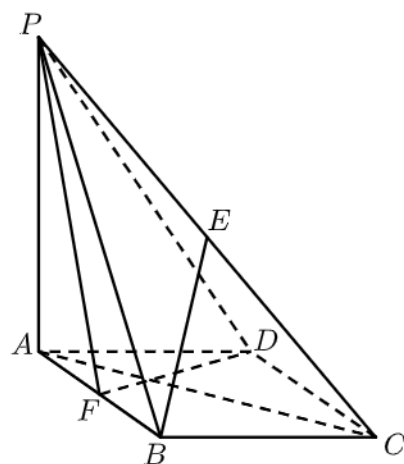


$\because$ 四边形 $CDEF$ 为矩形 ,
 $\therefore G$ 为 EC 中点 ,
 又 $\because M$ 为 EA 中点 ,
 $\therefore MF$ 为 $\triangle EAC$ 的中位线 ,
 $\therefore MG \parallel AC$,
 $MG \subset \text{面 } DMF$,
 $AC \not\subset \text{面 } DMF$,
 $\therefore AC \parallel \text{面 } DMF$.

(2) $\because \angle ADC = 90^\circ$,
 $\therefore DC \perp AD$,
 又 $\because$ 四边形 $CDEF$ 为矩形 ,
 $\therefore DC \perp DE$,
 $DE \cap AD = D$,
 $\therefore DC \perp \text{面 } ADE$,
 $\because AB \parallel DC$,
 $\therefore AB \perp \text{面 } ADE$,
 $\therefore AB \perp DM$,
 $\because DA = DE$, M 为 AE 中点 ,
 $\therefore DM \perp EA$,
 $AB \cap EA = A$,
 $\therefore DM \perp \text{面 } EAB$,
 $\therefore BE \perp DM$.

7

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = PA = 2$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 中点.



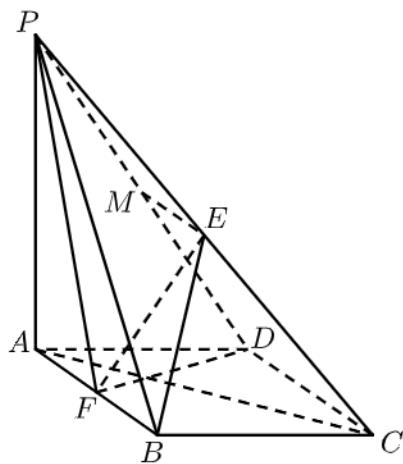
- (1) 求证： $BE \parallel$ 平面 PDF ；
- (2) 求证：平面 $PDF \perp$ 平面 PAB ；
- (3) 求 BE 与平面 PAC 所成的角.

答案

- (1) 证明见解析
- (2) 证明见解析
- (3) $\angle BEO = 45^\circ$

解析

- (1) 取 PD 中点为 M ，连 ME ， MF ，



$\because E$ 是 PC 的中点，
 $\therefore ME$ 是 $\triangle PCD$ 的中位线，
 $\therefore ME \parallel \frac{1}{2}CD$ ，
 $\because F$ 是 AB 中点且由于 $ABCD$ 是菱形， $AB \parallel CD$ ， $\therefore ME \parallel FB$ ，
 $\therefore$ 四边形 $MEBF$ 是平行四边形．
 $\therefore BE \parallel MF$.

$\because BE \not\subset \text{平面} PDF,$

$MF \subset \text{平面} PDF,$

$\therefore BE // \text{平面} PDF.$

(2) $\because PA \perp \text{平面} ABCD,$

$DF \subset \text{平面} ABCD,$

$\therefore DF \perp PA,$

$\because \text{底面} ABCD \text{是菱形},$

$\angle BAD = 60^\circ,$

$\therefore \triangle DAB \text{为正三角形},$

$\because F \text{是} AB \text{中点},$

$\therefore DF \perp AB,$

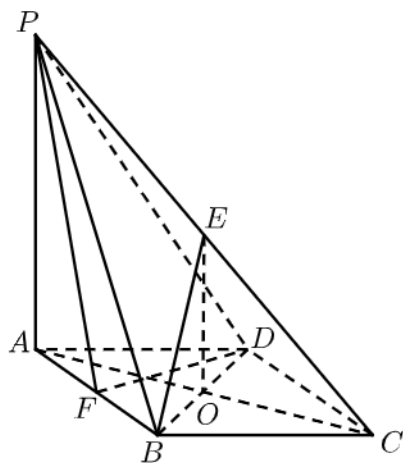
$\because PA \cap AB = A,$

$\therefore DF \perp \text{平面} PAB,$

$\because DF \subset \text{平面} PDF,$

$\therefore \text{平面} PDF \perp \text{平面} PAB.$

(3) 连 BD 交 AC 于 O 、连 EO ,



$\because \text{底面} ABCD \text{是菱形},$

$\therefore BO \perp AC,$

$\because PA \perp \text{平面} ABCD,$

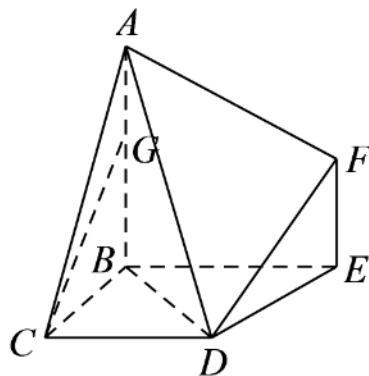
$BO \subset \text{平面} ABCD,$

$\therefore BO \perp PA,$

$\because PA、AC \text{是平面} PAC \text{内的两条相交直线},$

$\therefore BO \perp \text{平面} PAC$,
 $\therefore EO$ 是 BE 在平面 PAC 内的射影 ,
 $\therefore \angle BEO$ 是 BE 与平面 PAC 所成的角 ,
 $\therefore O$ 是 AC 、 BD 的中点 ,
 $\therefore BO = 1$, EO 是 $\triangle PAC$ 的中位线 ,
 $\therefore EO = \frac{1}{2}PA = 1$,
 $\therefore$ 在直角 $\triangle BEO$ 中 ,
 $\tan \angle BEO = \frac{BO}{EO} = 1$,
 $\therefore \angle BEO = 45^\circ$,
 $\therefore$ 直线 BE 与平面 PAC 所成的角为 45° .

- 8 如图, 多面体 $ABCDEF$ 中, BA, BC, BE 两两垂直, 其 $AB \parallel EF, CD \parallel BE, AB = BE = 2, BC = CD = EF = 1$.



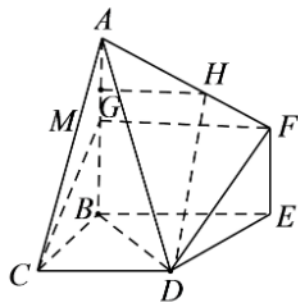
- (1) 若点 G 在线段 AB 上, 且 $BG = 3GA$, 求证: $CG \parallel \text{平面} ADF$.
- (2) 求证: 平面 $ABD \perp \text{平面} DEF$.
- (3) 求直线 DF 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

- (1) 过 G 点作 $GH \parallel BE$, 与 AF 相交于点 H ,



连接 DH ，过 F 点作 BE 的平行线交 AB 于点 M ，

过 F 点作 BE 的平行线交 AB 于点 M ，

$$\therefore EF \parallel BM,$$

$\therefore G, H$ 分别为 AM, AF 中点.

$$\text{即 } GH \parallel \frac{1}{2}MF, GH \parallel \frac{1}{2}BE,$$

$$GH \parallel \frac{1}{2}CD.$$

$\therefore$ 四边形 $GHDC$ 为平行四边形.

$$\therefore HD \parallel GC.$$

又 $\because HD \subset \text{平面 } ADF$.

$\therefore CG \parallel \text{平面 } ADF$.

(2) 由题意得 $\angle BCD = 90^\circ$.

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2}, DE = \sqrt{2}.$$

$$\therefore BD^2 + DE^2 = BE^2.$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ, BD \perp DE.$$

又 $\because AB \perp BE, AB \perp BC$.

$$BE \cap BC = B.$$

$\therefore AD \perp \text{面 } BCDE$.

又 $\because DE \subset \text{面 } BCDE$.

$$\therefore AB \perp DE.$$

$$\therefore AB \cap BD = B.$$

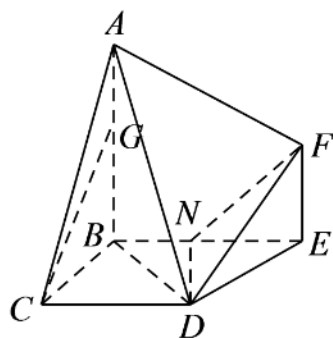
$\therefore DE \perp \text{面 } ABD$.

又 $\because DE \subset \text{面 } DEF$.

$\therefore \text{面 } ABD \perp \text{面 } DEF$.

(3) 过点 D 作 BE 垂线，与 BE 交于点 N ，

连接 FN ， $\angle DEF$ 即为所求角．



$$\because DN \parallel BC.$$

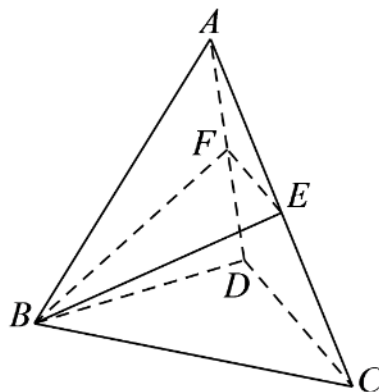
$$\therefore DN = 1.$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中，

$$DF = \sqrt{DE^2 + EF^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{DN}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $BA = BD$ ， $AD \perp CD$ ，点 E 、 F 分别为 AC 、 AD 的中点．



(1) 求证： $EF \parallel$ 平面 BCD ．

(2) 求证：平面 $EFB \perp$ 平面 ABD ．

(3) 若 $BC = BD = CD = AD = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，求二面角 $B - AD - C$ 的余弦值．

答案

(1) 证明见解析．

(2) 证明见解析．

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．

解析

(1) 在 $\triangle ACD$ 中,

$\because E, F$ 是 AC, AD 的中点,

$\therefore EF \parallel CD$,

$\because EF$ 不包含于平面 $BCD, CD \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 BCD .

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, $AD \perp CD, EF \parallel CD$,

$\therefore EF \perp AD$,

$\because$ 在 $\triangle ABD$ 中, $BA = BD, F$ 为 AD 的中点,

$\therefore BF \perp AD$,

$\because EF \subset$ 平面 $EFB, BF \subset$ 平面 EFB , 且 $EF \cap BF = F$,

$\therefore AD \perp$ 平面 EFB ,

$\because AD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore$ 平面 $EFB \perp$ 平面 ABD .

(3) 二面角 $B-AD-C$ 即为二面角 $B-AD-E$,

由(2)知 $EF \perp AD, BF \perp AD$,

$\therefore \angle BFE$ 即为所求二面角 $B-AD-C$ 的平面角,

在 $\triangle BEF$ 中,

$\because BC = BD = CD = AD = 2, AC = 2\sqrt{2}$,

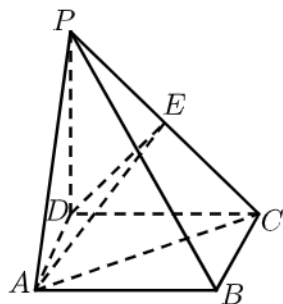
$\therefore BF = \sqrt{3}, EF = 1, BE = \sqrt{2}$,

由余弦定理, 得 $\cos \angle BFE = \frac{BF^2 + EF^2 - BE^2}{2BF \cdot EF} = \frac{3 + 1 - 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD = DC = 4, AD = 2$, E 为 PC 的中点.



- (1) 求证： $DE \perp$ 平面 PBC .
- (2) 求三棱锥 $P - ADE$ 的体积 .
- (3) 在线段 AC 上是否存在一点 M , 使得 $PA \parallel$ 平面 EDM , 若存在 , 求出 AM 的长 . 若不存在 , 请说明理由 .

(本题不能使用空间向量解题)

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{8}{3}$.
- (3) 存在 , $AM = \sqrt{5}$.

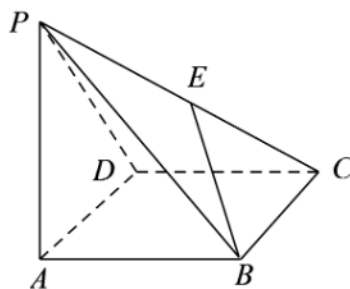
解析

- (1) $PD \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore PD \perp BC$,
 $\because ABCD$ 是矩形 ,
 $\therefore BC \perp CD$,
 $\because PD \cap CD = D$,
 $\therefore BC \perp$ 平面 PDC ,
 $\therefore BC \perp DE$.
 又 $\because PD = DC$, E 为 PC 中点 ,
 $\therefore DE \perp PC$,
 $\because BC \cap PC = C$,
 $\therefore DE \perp$ 平面 PBC .
- (2) $V_{P-ADE} = V_{E-PAD} = \frac{1}{2} V_{C-PAD} = \frac{1}{2} V_{P-DAC}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle DAC} \cdot |PD|$
 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3}$
 $= \frac{8}{3}$.
- (3) 存在 , 当 M 为 AC 中点时 , $PA \parallel$ 面 EDM ,
 此时 $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
 证明 : $\because E$ 、 M 分别是 PC 、 AC 中点 ,
 $\therefore EM \parallel PA$,
 $\because PA \not\subset$ 面 EDM ,

$$EM \subset \text{面} EDM,$$

$$\therefore PA // \text{面} EDM.$$

- 11 如图, 已知四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AB // CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA \perp \text{平面} ABCD$, $CD = 2$, $PA = AD = AB = 1$, E 为 PC 的中点.



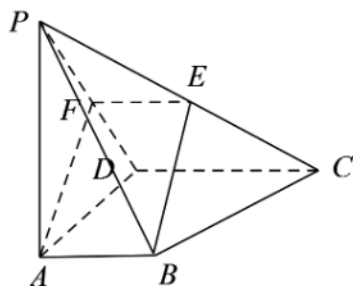
- (1) 求证: $EB // \text{平面} PAD$.
- (2) 求证: $\text{平面} PBC \perp \text{平面} PCD$.
- (3) 求直线 BD 与平面 PCD 所成的角.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) 30° .

解析

- (1) 取 PD 中点, 连接 EF ,



$\because E, F$ 分别是 PC, PD 中点,

$$\therefore EF // \frac{1}{2} CD.$$

$\because AD = 1, CD = 2, AB // CD,$

$$\therefore AB // \frac{1}{2} CD,$$

$$\therefore AB // EF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

$$\therefore EB // AF .$$

$$\text{又} \because EB \not\subset \text{面} PAD , AF \subset \text{面} PAD ,$$

$$\therefore EB // \text{面} PAD .$$

$$(2) \because PA \perp \text{面} ABCD , CD \subset \text{面} ABCD ,$$

$$\therefore PA \perp CD .$$

$$\text{又} \because AD \perp CD , AD \subset \text{面} PAD , PA \subset \text{面} PAD ,$$

$$\therefore CD \perp \text{面} PAD .$$

$$\text{又} \because AF \subset \text{面} PAD ,$$

$$\therefore CD \perp AF .$$

$$\because PA = AD , F \text{ 是 } PD \text{ 中点} ,$$

$$\therefore AF \perp PD .$$

$$\text{又} \because CD \subset \text{面} PCD , PD \subset \text{面} PCD ,$$

$$\therefore AF \perp \text{面} PCD .$$

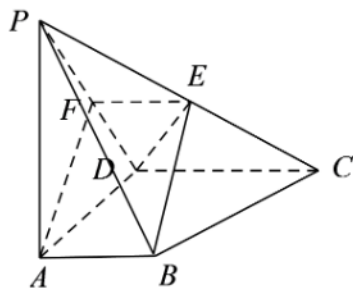
$$\text{又} \because EB // AF ,$$

$$\therefore EB \perp \text{面} PCD .$$

$$\text{又} \because ZB \subset \text{面} PBC ,$$

$$\therefore \text{面} PBC \perp \text{面} PCD .$$

$$(3) \text{ 连接 } DE ,$$



$\angle BDE$ 即为直线 BD 与面 PCD 所成角 .

$$\because PA = AD = 1 , PA \perp AD ,$$

$$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore BE = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

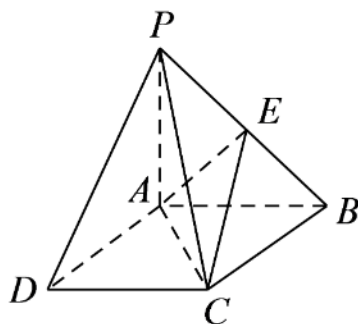
$$\because AD = AB = 1 , \angle BAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \sin \angle BDE = \frac{BE}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BDE = 30^\circ.$$

- 12 如图, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, $PA = 2$, E 是 PB 的中点.



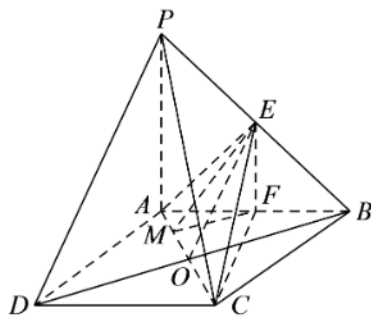
- (1) 求证: $PD \parallel$ 平面 AEC .
- (2) 求直线 EC 与平面 $ABCD$ 所成角的大小.
- (3) 求二面角 $E-AC-B$ 的正切值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 30° .
- (3) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

解析

- (1) 连 BD 交 AC 于 O , 连 OE ,



$\because$ 菱形 $ABCD$,

$\therefore BO = DO$,

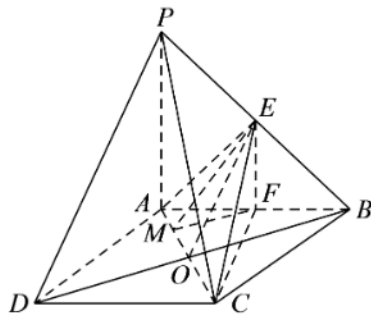
又 $\because E$ 平分 BD ,

$\therefore OE$ 为 $\triangle BPD$ 中位线,

$$\therefore PD \parallel OE,$$

$$\therefore PD \parallel \text{面} ACE.$$

(2) 取 AB 中点 F , 连 EF 、 CF ,



$\therefore E$ 、 F 分别平分 BP 、 AB ,

$\therefore EF$ 为 $\triangle PAB$ 中位线,

$$\therefore EF \parallel \frac{1}{2} PA, EF = 1,$$

又 $\because PA \perp \text{面} ABCD$,

$\therefore EF \perp \text{面} ABCD$,

$\therefore EF \perp AB, EF \perp CF$,

又 $\because \angle BAD = 120^\circ$, 菱形 $ABCD$ 边长为 2,

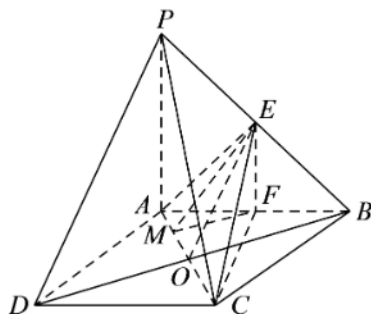
$$\therefore CF = \sqrt{3}, \text{Rt} \triangle ECF,$$

$$\therefore CE = 2,$$

$\therefore \angle ECF$ 即为 EC 与面 $ABCD$ 所夹角,

$\therefore \angle ECF = 30^\circ$ 即为所求.

(3) 作 $EM \perp AC$, 连 MF ,



$\because PA \perp AB, PA = AB = 2, E$ 平分 BP ,

$$\therefore PB = 2\sqrt{2}, AE = \sqrt{2},$$

又 $\because AC = 2, CE = 2, AE = \sqrt{2}$,

$$\therefore AC \cdot EM = AE \cdot h,$$

$$EM = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

又 $\because EF \perp \text{面} ABCD,$

$\therefore EF \perp MF,$

$$\therefore MF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because DB = \sqrt{3}$ 且 F 平分 $AB,$

$\therefore MF$ 为 $\triangle AOB$ 中位线,

$$\therefore MF \parallel \frac{1}{2}OB,$$

$\therefore \angle EMF$ 即为 $E-AC-B$ 的二面角,

$$\therefore \tan \angle EMF = \frac{EF}{MF} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$