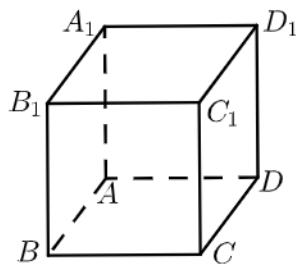


二面角与空间距离练习题

一、二面角的定义及求法

1 二面角 .



边长为2的正方体中，

- (1) 求 $A - B_1D_1 - C$ 的余弦值 .
- (2) 求 $A - B_1D_1 - C_1$ 的余弦值 .
- (3) 求 $A - B_1D_1 - D$ 的余弦值 .
- (4) 平面 A_1BC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值 .

答案

- (1) $\frac{1}{3}$.
- (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
- (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

- (1) 取 B_1D_1 中点为 O ，连接 AO 、 CO ，

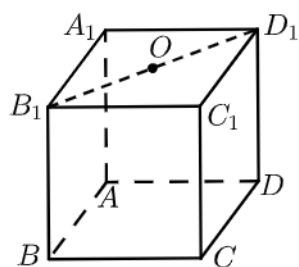
$$AB_1 = AD_1, CB_1 = CD_1,$$

$$\therefore AO \perp B_1D_1, CO \perp B_1D_1,$$

$$\therefore \angle AOC \text{ 为所成角, } AO = CO = \sqrt{6},$$

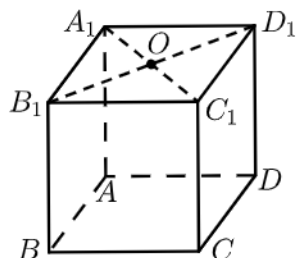
$$\cos \angle AOC = \frac{6 + 6 - 8}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.



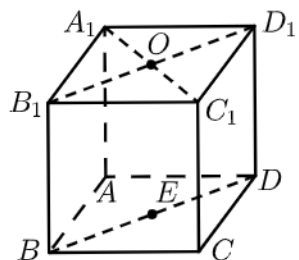
- (2) $AB_1 = AD_1 = \sqrt{6}$, $C_1B_1 = C_1D_1 = 2$,
 $\therefore AO \perp B_1D_1$, $C_1O \perp B_1D_1$,
 $\therefore \angle AOC_1$ 为所成角, $AO = \sqrt{6}$, $C_1O = \sqrt{2}$,

$$\cos \angle AOC_1 = \frac{6 + 2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{6} \times 2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
.
 故答案为: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



- (3) 取 BD 的中点 E , 则 $\angle AOE$ 为所成角,

$$\cos \angle AOE = \frac{OE}{AO} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
.
 故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



- (4) 方法一: 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,
 $\therefore$ 面 A_1BC_1 与 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角 $\angle BOB_1$ 为所求角,

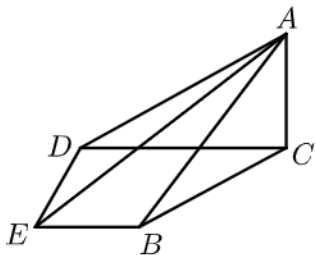
$$\cos \angle BOB_1 = \frac{B_1O}{BO} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
.
 故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二: 面积投影法.

$$\cos \theta = \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BA_1C_1}} = \frac{2}{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 2 如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$, $AB = CD = 2$, $DE = BE = 1$, $AC = \sqrt{2}$.



- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 ACD ;
(2) 求二面角 $B-AD-E$ 的大小.

答案

- (1) 证明见解析;
(2) 二面角 $B-AD-E$ 为 $\frac{\pi}{6}$.

解析

- (1) 由题意, 地面 $BCDE$ 为直角梯形, $BE \parallel CD$, BE 平行且等于 $\frac{1}{2}DC$. 取 DC 中点 F , 连接 BF , 则 BE 平行且等于 DF , 四边形 $BEDF$ 为矩形. $\angle BFC = 90^\circ$, $BF = FC = 1$, 所以 $BC = \sqrt{2}$, 又因为 $AC = \sqrt{2}$, $AB = 2$, $BC^2 + AC^2 = AB^2$ 得 $\angle ABC = 90^\circ$, 又因为 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, 所以 $AC \perp BCDE$, 所以 $AC \perp DE$, 又 $DE \perp CD$, 所以 $DE \perp$ 平面 ACD .

- (2) 如图建立平面直角坐标系, 则

$$E(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 2, 0), A(0, 2, \sqrt{2})$$

设面 ADE 的法向量是 $\vec{n}_1(x_1, y_1, z_1)$, 面 ABD 的法向量是 $\vec{n}_2(x_2, y_2, z_2)$

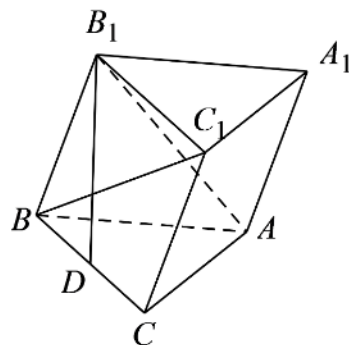
$$\begin{cases} \vec{DE} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{DA} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \vec{n}_1 = (0, 1, -\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} \vec{DB} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \vec{DA} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ 2y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \vec{n}_2 = (-1, 1, -\sqrt{2})$$

设二面角 $B-AD-E$ 大小的平面角为 θ , 由图知 θ 为锐角, 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 - \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1+2}{\sqrt{1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即二面角 } B-AD-E \text{ 为 } \frac{\pi}{6}.$$

- 3 如图, 斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 B_1 在底面 ABC 上的射影恰为 BC 的中点, 且 $BC = CA = AA_1$.



- (1) 求证：平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .
- (2) 求证： $BC_1 \perp AB_1$.
- (3) 求二面角 $B - AB_1 - C_1$ 的余弦值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $-\frac{5}{7}$.

解析

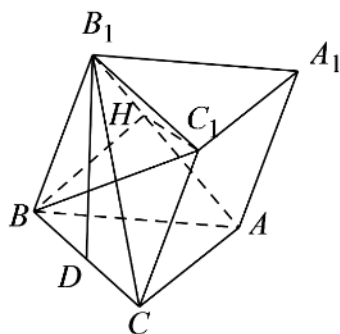
- (1) $\because B_1$ 在底面 ABC 上的射影为 D ,
 $\therefore B_1D \perp$ 平面 ABC ,
 $\because AC \subset$ 平面 ABC ,
 $\therefore B_1D \perp AC$,
 $\because \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore BC \perp AC$,
 $\because B_1D \cap BC = D$,
 $\therefore AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,
 $\because AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,
 $\therefore$ 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .
- (2) 连结 B_1C , $\because$ 在平行四边形 BCC_1B_1 中 , $BC = CC_1$,
 $\therefore$ 平行四边形 BCC_1B_1 是菱形 ,
 $\therefore B_1C \perp BC_1$,
 $\because AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,
 $\therefore AC \perp BC_1$,
 $\because B_1C \cap AC = C$,

$\therefore BC_1 \perp \text{平面} ACB_1$,

$\therefore AB_1 \subset \text{平面} ACB_1$,

$\therefore BC_1 \perp AB_1$.

(3) 作 $BH \perp AB_1$ 于 H , 连结 C_1H ,



$\therefore AB_1 \perp BC_1$, $BH \cap BC_1 = B$,

$\therefore AB_1 \perp \text{平面} BHC_1$,

$\therefore \angle BHC_1$ 是二面角 $B - AB_1 - C_1$ 的平面角,

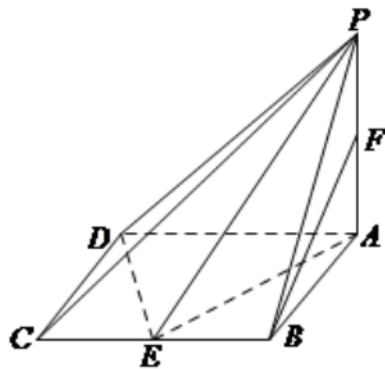
设 $BC = 2$, 则 $BC_1 = 2\sqrt{3}$, $B_1A = 2\sqrt{2}$, $BH = \frac{\sqrt{14}}{2}$,

由 $\text{Rt}\triangle BB_1H \cong \text{Rt}\triangle C_1B_1H$, 得 $C_1H = BH = \frac{\sqrt{14}}{2}$,

$$\therefore \cos \angle BHC_1 = \frac{BH^2 + C_1H^2 - BC_1^2}{2BH \cdot C_1H} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 12}{2 \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}} = -\frac{5}{7},$$

$\therefore$ 二面角 $B - AB_1 - C_1$ 的余弦值为 $-\frac{5}{7}$.

- 4 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $PA = \sqrt{3}$, $PA \perp \text{面} ABCD$, E 、 F 分别为 BC 、 PA 的中点.



- (1) 求证: $BF \parallel \text{平面} PDE$.
- (2) 求二面角 $D - PE - A$ 的正弦值.

(3) 求点 C 到平面 PDE 的距离.

答案

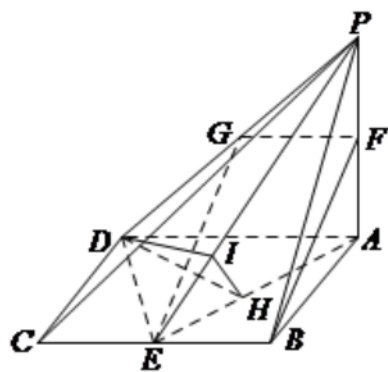
(1) 证明见解析.

(2) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

(3) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

解析

(1) 如图所示, 取 PD 中的 G , 连结 GF 、 GE ,



$\therefore E$ 、 F 分别为 BC 、 PA 的中点.

$\therefore FG \parallel BE$, $FG = BE$.

所以四边形 $BFGE$ 是平行四边形,

$\therefore BF \parallel$ 平面 PDE .

(2) 作 $DH \perp AE$ 于 H , 作 $HI \perp PE$ 于 I , 连结 DI , 可得 $DH \perp$ 面 PAB ,

$\therefore DH \perp PE$, 又因为 $PE \perp HI$, $HI \cap DH = H$,

$\therefore PE \perp$ 面 DIH ,

$\therefore PE \perp DI$,

$\therefore \angle DIH$ 即为二面角 $D - PE - A$ 的平面角,

在直角 $\triangle DIH$ 中, $\sin \angle DIH = \frac{DH}{DI} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$,

$\therefore$ 二面角 $D - PE - A$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

(3) 设点 C 到平面 PDE 的距离为 h ,

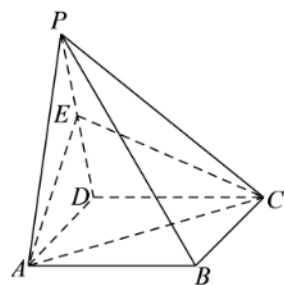
$\therefore V_{P-CDE} = V_{C-PDE}$,

$$\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle CDE} \times PA = \frac{1}{3} S_{\triangle PDE} \times h,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times h, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$\therefore$ 点 C 到平面 PDE 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

- 5 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，侧面 PAD 是正三角形，且侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E 为侧棱 PD 的中点。



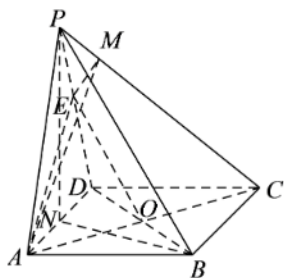
- (1) 证明： $PB \parallel$ 平面 EAC 。
- (2) 求证： $AE \perp$ 平面 PCD 。
- (3) 若 $AD = AB$ ，试求二面角 $A-PC-D$ 的正切值。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 证明见解析。
- (3) $\sqrt{6}$ 。

解析

- (1) 连接 BD 交 AC 于 O ，连接 EO ，则 O 为 BD 的中点，



$\because E$ 为侧棱 PD 的中点，

$\therefore EO \parallel \frac{1}{2}PB$ ，且 $EO = \frac{1}{2}PB$ ，

又 $PB \not\subset$ 平面 EAC ， $EO \subset$ 平面 EAC ，

$\therefore PB \parallel$ 平面 EAC 。

- (2) $\because ABCD$ 是矩形，

$\therefore CD \perp AD$ ，

$\because$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$ ，

$\therefore CD \perp$ 侧面 PAD ，

$\because CD \subset \text{面} PDC,$

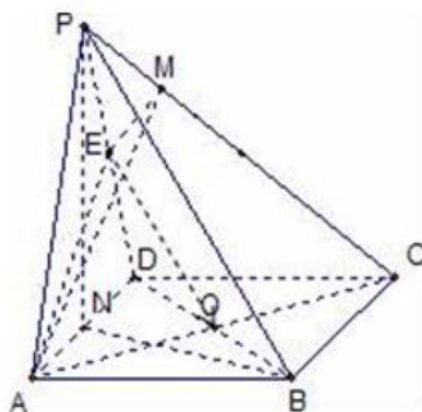
$\therefore \text{面} PDC \perp \text{侧面} PAD,$

正三角形 PAD 中, E 为 PD 的中点, 所以 $AE \perp PD,$

$\therefore \text{面} PDC \cap \text{面} PAD = PD,$

$\therefore AE \perp \text{平面} PCD.$

(3) 在 PC 上取点 M 使得 $PM = \frac{1}{4}PC,$



由于正三角形 PAD 及矩形 $ABCD$, 且 $AD = AB$, 所以 $PD = AD = AB = DC,$

所以在等腰直角三角形 DPC 中, $EM \perp PC,$

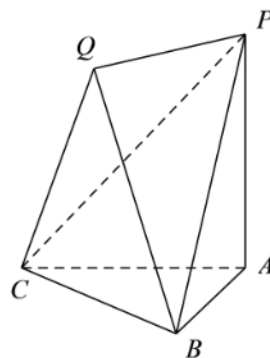
连接 AM , 因为 $AE \perp \text{平面} PCD$, 所以 $AM \perp PC,$

所以 $\angle AME$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角,

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中, $\tan \angle AME = \frac{AE}{ME} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6},$

即二面角 $A-PC-D$ 的正切值为 $\sqrt{6}.$

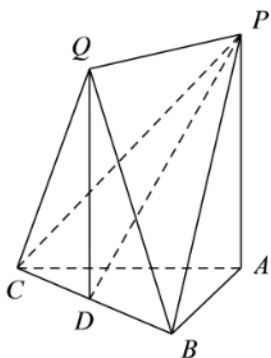
6 如图, 已知 $PA \perp \text{平面} ABC$, $PQ \perp \text{平面} QBC$, 且 $PA = PQ = AB = BC = 2.$



求二面角 $P-BC-Q$ 的正弦值.

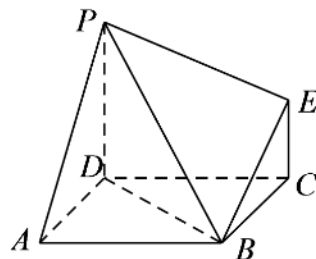
答案 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

解析 $\because PA \perp \text{平面} ABC, \angle PAC = \angle PAB = 90^\circ$,
 已知 $PA = AB = BC = 2 \therefore PB = PC = 2\sqrt{2}$,
 $\because PQ \perp \text{平面} QBC, \therefore \angle PQB = \angle PQC = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle PQB \cong \triangle PQC$, 可得 $BQ = CQ = 2$,
 取 BC 的中点 D , 连接 QD, PD , 则 $QD \perp BC, PD \perp BC$,



$\therefore \angle PDQ$ 为二面角 $P-BC-Q$ 的平面角,
 $\because AD = \sqrt{3}, PD = \sqrt{7}$,
 $\therefore \sin \angle PDQ = \frac{PQ}{PD} = \frac{PQ}{PD} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,
 故二面角 $P-BC-Q$ 的正弦值 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

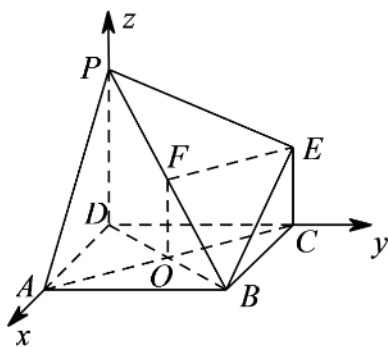
7 图为一简单组合体, 其底面 $ABCD$ 为正方形, $PD \perp \text{平面} ABCD, EC \parallel PD$, 且
 $PD = AD = 2EC = 2$.



求平面 PBE 与平面 PAD 夹角的余弦值.

答案 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

解析 建立如图所示的坐标系，



则 $D(0,0,0)$, $C(0,2,0)$, $A(2,0,0)$, $P(0,0,2)$, $E(0,2,1)$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = (0,2,0)$ 是平面 PAD 的法向量 ,

设平面 PBE 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

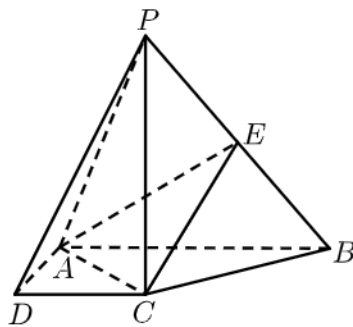
$\therefore \overrightarrow{BP} = (-2,-2,2)$, $\overrightarrow{BE} = (-2,0,1)$,

$$\therefore \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} ,$$

其中取 $z = 1$, 则 $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$,

因此 , 平面 PBE 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\left| \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

- 8 如图 , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 四边形 $ABCD$ 是直角梯形 , $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, $PC = AB = 2AD = 2CD = 2$, E 是 PB 的中点 .



求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值 .

答案 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解析 由 (1) 知 $AC \perp$ 平面 PBC ,

$$\therefore AC \perp CP, AC \perp CE,$$

$\therefore \angle PCE$ 即为二面角 $P-AC-E$ 的平面角.

$$\therefore PC = AB = 2AD = 2CD = 2,$$

$$\therefore \text{在} \triangle PCB \text{中, 可得 } PE = CE = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle PCE = \frac{CP^2 + CE^2 - PE^2}{2CP \cdot CE} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

二、空间距离的求法

9 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB=2$, $AA_1=1$, 若则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

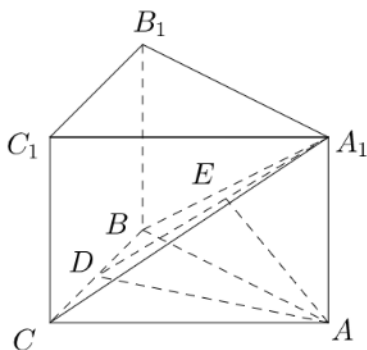
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. $\sqrt{3}$

答案 B

解析



设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$\therefore V_{A_1-ABC} = V_{A-A_1BC},$$

$$\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h,$$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{1}{3} \times 2 \times h,$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 B.

10 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AB=2$, E 是 PB 的中点.

- (1) 求证： $BD \perp$ 平面 PAC .
- (2) 求证：平面 $EAD \perp$ 平面 PAB .
- (3) 求三棱锥 $P - EAD$ 的体积 .

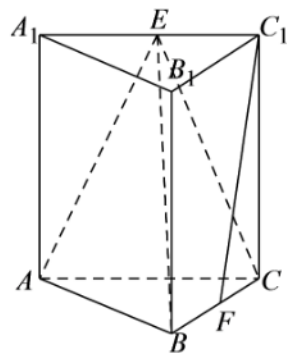
答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{2}{3}$.

解析

- (1) 连接 AC , $PA \perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow BD \perp PA$,
又 $BD \perp AC$,
由线面垂直判定 , $BD \perp$ 平面 PAC .
- (2) $AD \perp PA$, $AD \perp AB$,
故 $AD \perp$ 平面 PAB ,
由面面垂直判定 , 平面 $EAD \perp$ 平面 PAB .
- (3) $V_{P-EAD} = V_{D-AEP} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{3}$.

- 11 如图 , 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , $AB \perp BC$, $AA_1 = AC = 2$, $BC = 1$, E 、 F 分别为 A_1C_1 、 BC 的中点 .



- (1) 求证： $C_1F \parallel$ 平面 ABE .
- (2) 求点 C 到平面 ABE 的距离 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

解析

(1) 取 AB 的中点 G , 连接 EG 、 FG .

$\because F$ 、 G 是 BC 、 AB 的中点, $\therefore FG \parallel AC$, $FG = \frac{1}{2}AC$.

又 $\because E$ 是 A_1C_1 的中点, $\therefore EC_1 \parallel A_1C_1$, $EC_1 = \frac{1}{2}A_1C_1$.

又 $\because AC = A_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $\therefore EC_1 \parallel FG$, $EC_1 = FG$.

$\therefore$ 四边形 EC_1FG 是平行四边形, $\therefore C_1F \parallel EG$.

又 $\because EG \subset$ 平面 ABE , $C_1F \not\subset$ 平面 ABE , $\therefore C_1F \parallel$ 平面 ABE .

(2) 连接 B_1E . $\because AB \perp BC$, $AA_1 = AC = 2$, $BC = 1$.

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore AE = \sqrt{AA_1^2 + A_1E^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $BE = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore AE = BE$

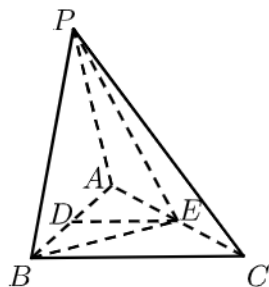
又 $\because BG = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore EG = \sqrt{BE^2 - BG^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times AB \times EG = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{51}}{4}$.

设点 C 到平面 ABE 的距离为 h , $\therefore V_{E-ABC} = V_{C-ABE}$.

$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times AA_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle ABE} \times h$, $\therefore h = \frac{S_{\triangle ABC} \times AA_1}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

12 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90^\circ$, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , D , E 分别为 AB , AC 中点.



(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC .

(2) 求证: $AB \perp PE$.

(3) 求三棱锥 $P-BEC$ 的体积.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

$$(3) V_{P-BEC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解析

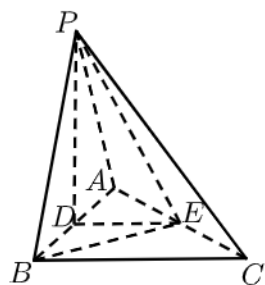
(1) 因为 D, E 分别为 AB, AC 中点,

所以 $DE \parallel BC$,

又 $DE \not\subset$ 平面 $PBC, BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 PBC .

(2) 连结 PD ,



因为 $DE \parallel BC$, 又 $\angle ABC = 90^\circ$,

所以 $DE \perp AB$.

又 $PA = PB, D$ 为 AB 中点,

所以 $PD \perp AB$.

所以 $AB \perp$ 平面 PDE ,

所以 $AB \perp PE$.

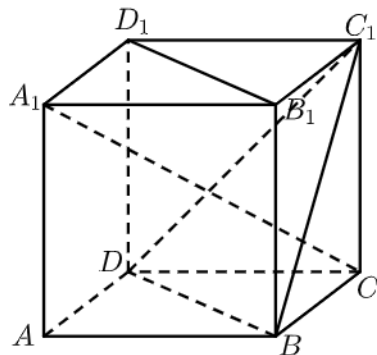
(3) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ,

有 $PD \perp AB$,

所以 $PD \perp$ 平面 ABC ,

$$\text{所以 } V_{P-BEC} = \frac{1}{2} V_{P-ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

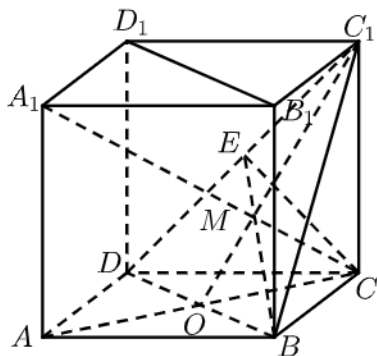
13 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中.



求二面角 $B - C_1D - C$ 的余弦值 .

答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析 取 DC_1 的中点 E , 连接 BE , CE .



$$\because BD = BC_1 ,$$

$$\therefore BE \perp DC_1 .$$

$$\because CD = CC_1 ,$$

$$\therefore CE \perp DC_1 .$$

$\angle BEC$ 为二面角 $B - C_1D - C$ 的平面角 .

设正方体的棱长为 a , 则 $CE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

又由 $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{2}a$, 得 $BE = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

在 $\triangle BEC$ 中 , 由余弦定理 , 得 $\cos \angle BEC = \frac{BE^2 + CE^2 - BC^2}{2BE \cdot CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.