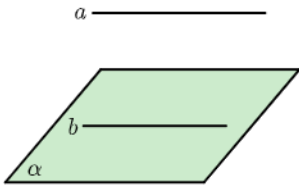


03线面平行与面面平行

一、线面平行

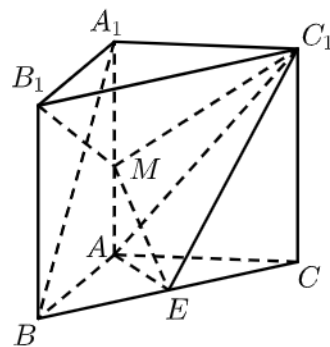
1. 线面平行判定定理

	文字语言	图形语言	符号语言
线面平行判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行, 则该直线与此平面平行		$\begin{cases} a // b \\ a \not\subset \alpha \Rightarrow a // \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}$

2. 例题精讲

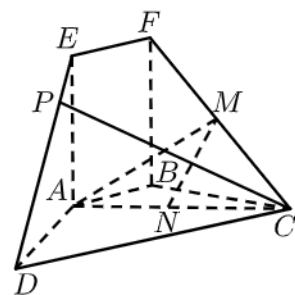
中位线模型

- 1 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 2$, E 是 BC 中点.



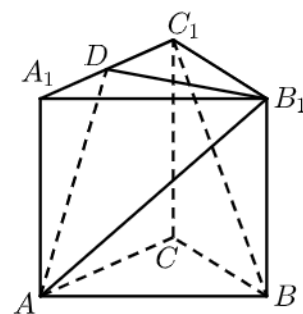
求证: $A_1B // \text{平面} AEC_1$.

- 2 如图, 平面 $EFBA \perp$ 平面 $ABCD$, $EFBA$ 为矩形, $ABCD$ 为等腰梯形, $AB // CD$, M 、 N 分别为 FC 、 AC 中点, $\angle ADC = 45^\circ$, $DC = 3AB = 3$, $AE = 2$.



证明： $MN \parallel$ 平面 $EFBA$.

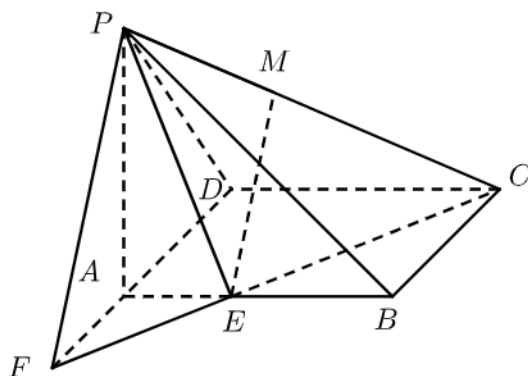
- 3 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 底面 ABC ， $AC \perp BC$ ， D 是 A_1C_1 的中点，且
 $AC = BC = AA_1 = 2$.



求证： $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D .

中位线推广

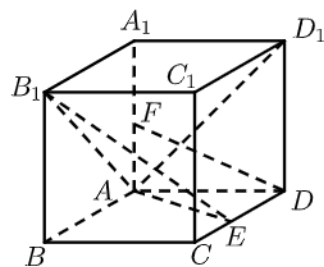
- 4 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = AD = \frac{1}{2}AB = 1$ ，
 点 E 、 M 分别在线段 AB 、 PC 上，且 $\frac{AE}{AB} = \frac{PM}{PC} = \lambda$ ，其中 $0 < \lambda < 1$ ，连接 CE ，延长 CE 与 DA 的
 延长线交于点 F ，连接 PE ， PF ， ME .



求证： $ME \parallel$ 平面 PFD .

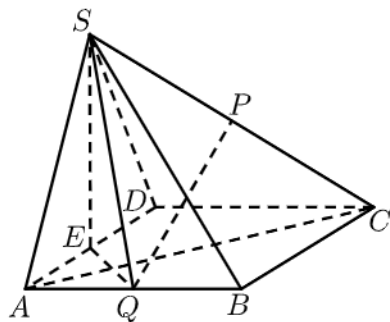
平行四边形模型

- 5 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形， $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ， E, F 分别为 CD, AA_1 的中点。



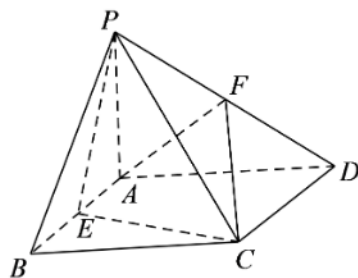
求证： $DF \parallel$ 平面 B_1AE 。

- 6 如图，在四棱锥 $S - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ，平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $SA = SD$ ， E, P, Q 分别是棱 AD, SC, AB 的中点。



求证： $PQ \parallel$ 平面 SAD 。

- 7 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是矩形， E, F 分别是 AB, PD 的中点。若 $PA = AD = 3$ ， $CD = \sqrt{6}$ 。



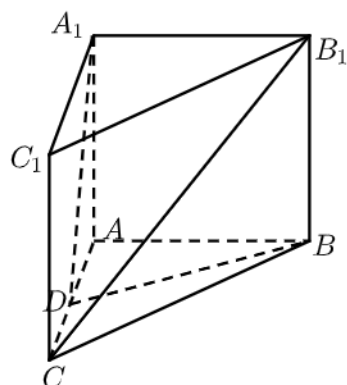
求证： $AF \parallel$ 平面 PCE 。

3. 课堂巩固



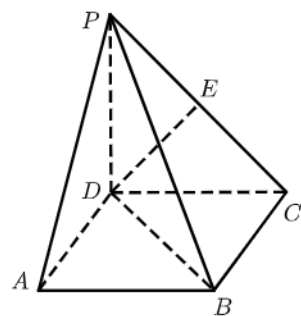
中位线模型

- 8 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB = AC = AA_1$, $AB \perp AC$, D 为线段 AC 的中点 .



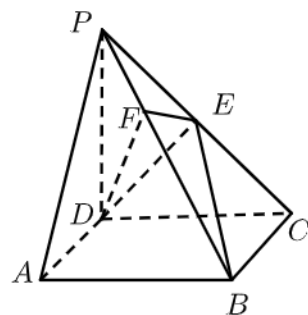
证明 : $B_1C //$ 平面 BA_1D .

- 9 如图 , 四棱锥 $P - ABCD$ 中 , $ABCD$ 为正方形 , $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = DC = 2$, E 是 PC 的中点 .



证明 : $PA //$ 平面 BDE .

- 10 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$ 中 , 底面 $ABCD$ 是正方形 , 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC$, E 是 PC 的中点 , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F .

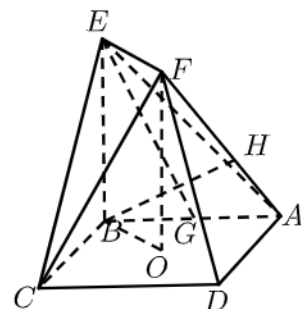


证明 $PA //$ 平面 EDB .



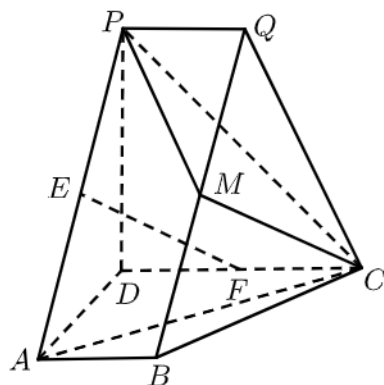
平行四边形模型

- 11 如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 为 AB 的中点， $AB = BE = 2$ 。



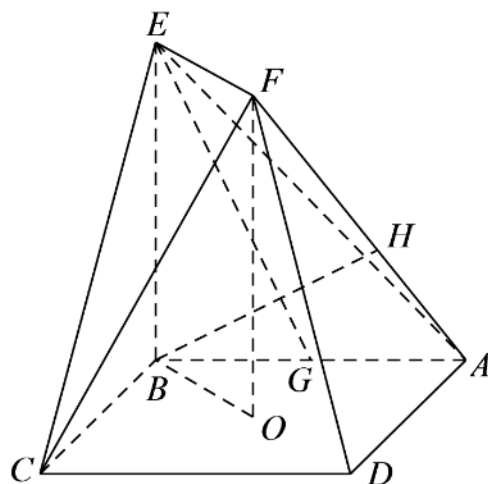
求证： $EG \parallel$ 平面 ADF 。

- 12 如图， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PQ \parallel CD$ ， $AD = CD = DP = 2PQ = 2AB = 2$ ，点 E, F, M 分别为 AP, CD, BQ 的中点。



求证： $EF \parallel$ 平面 MPC 。

- 13 如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 为 AB 的中点， $AB = BE = 2$ 。



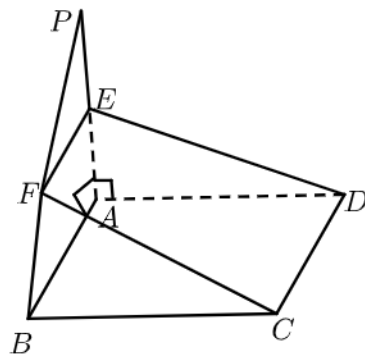
求证： $EG \parallel \text{平面} ADF$ ；

4. 线面平行性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
线面平行 性质定理	一条直线与一个平面平行,则 过这条直线的任一平面与此 平面的交线与该直线平行		$\begin{cases} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

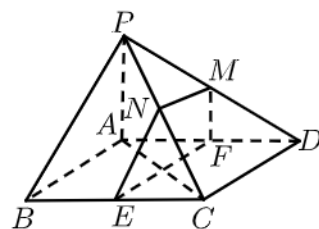
5. 例题精讲

14 如图，点 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，且 $PA \perp \text{平面} ABCD$ 。



过 CD 作一平面交平面 PAB 于 EF ，求证： $CD \parallel EF$ 。

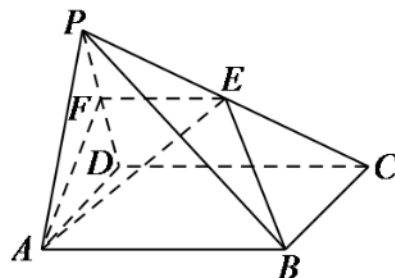
- 15 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle BCD = 135^\circ$ ，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA \perp AB$ ， $AB = AC = PA = 2$ ， E, F 分别为 BC, AD 的中点，过 EF 的平面与面 PCD 交于 M, N 两点。



求证： $EF \parallel MN$ 。

6. 课堂巩固

- 16 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 是棱 PC 的中点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F 。



求证： $AB \parallel EF$ 。

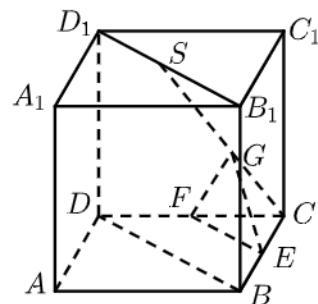
二、面面平行

1. 面面平行判定定理

	文字语言	图形语言	符号语言
面面平行判定定理	一个平面内的两条相交直线与另一平面平行,则这两个平面平行		$\begin{cases} a \parallel \beta, b \parallel \beta \\ a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ a \cap b = P \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

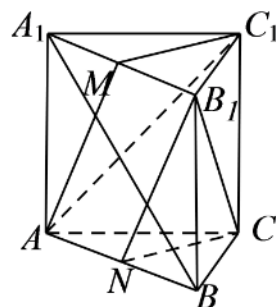
2. 例题精讲

- 17 如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， S 是 B_1D_1 的中点， E, F, G 分别是 BC, DC, SC 的中点．求证：



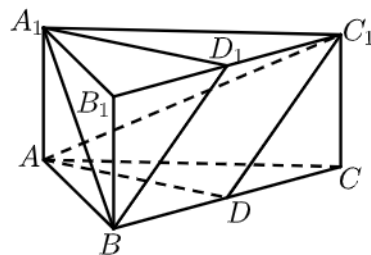
- (1) 直线 $EG \parallel$ 平面 BDD_1B_1 .
- (2) 平面 $EFG \parallel$ 平面 BDD_1B_1 .

- 18 如图所示，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $B_1C_1 = A_1C_1$ ， $AC_1 \perp A_1B$ ， M, N 分别是 A_1B_1, AB 的中点．



求证：平面 $AMC_1 \parallel$ 平面 NB_1C .

- 19 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2AA_1 = 4$ ，点 D 是 BC 上一点，且 $A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ，点 D_1 是 B_1C_1 的中点．

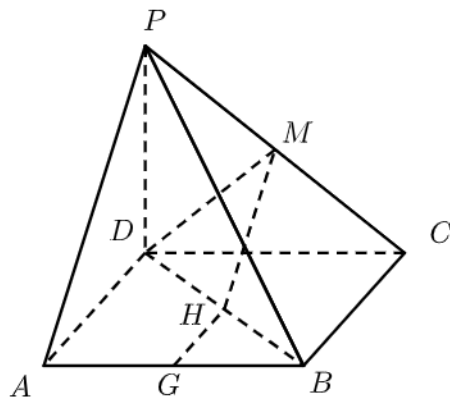


- (1) 求证：平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D_1 .

(2) 求三棱锥 $C - AC_1D$ 的体积 .

3. 课堂巩固

20 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为平行四边形, M 为 PC 的中点, H 为 BD 中点, G 为 AB 中点 .



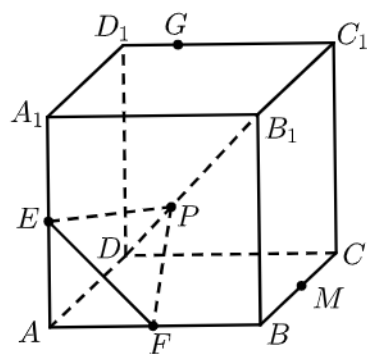
求证: 面 $GHM \parallel$ 平面 PAD .

4. 面面平行性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
面面平行性质定理	如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么它们的交线平行		$\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \Rightarrow a \parallel b \\ \beta \cap \gamma = b \end{cases}$

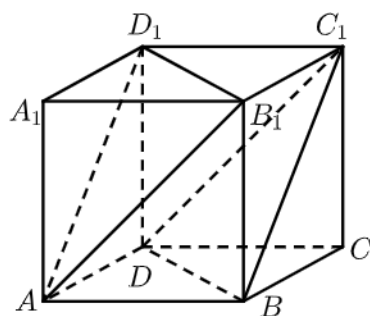
5. 例题精讲

21 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 G 在棱 D_1C_1 上, 且 $D_1G = \frac{1}{4}D_1C_1$, 点 E 、 F 、 M 分别是棱 AA_1 、 AB 、 BC 的中点, P 为线段 B_1D 上一点, $AB = 4$.



若平面 EFP 交平面 DCC_1D_1 于直线 l ，求证： $l \parallel A_1B$ 。

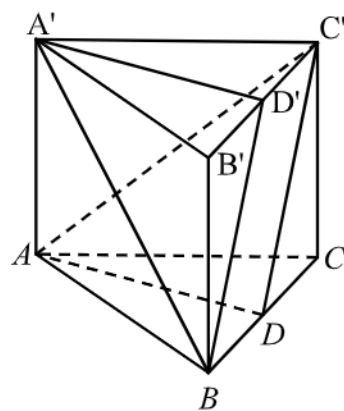
22 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中。



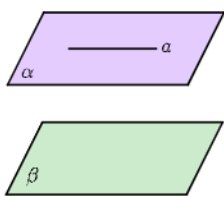
求证：平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 C_1BD 。

6. 课堂巩固

23 如图所示，已知三棱锥 $ABC - A'B'C'$ 中， D 是 BC 的中点， D' 是 $B'C'$ 的中点，设平面 $A'D'B \cap$ 平面 $ABC = a$ ，平面 $ADC' \cap$ 平面 $A'B'C' = b$ ，判断直线 a 、 b 的位置关系，并证明。



7. 两平面平行的其他性质

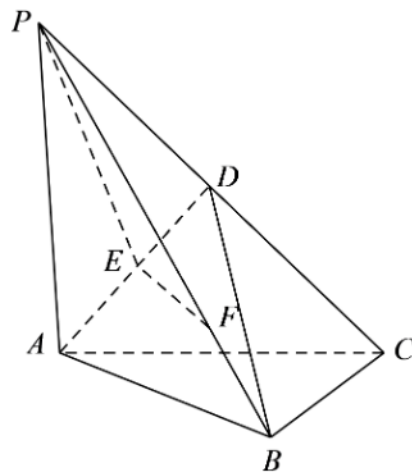
	文字语言	图形语言	符号语言
性质	如果两个平面平行,那么在一个平面内的所有直线都平行于另一个平面		$\alpha // \beta$ 且 $a \subset \alpha \Rightarrow a // \beta$

8. 例题精讲

- 24 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA = AC = 4, AB = 2$.
求证: $MN //$ 平面 BDE .

9. 课堂巩固

- 25 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, D 为 PC 的中点, E 为 AD 的中点, 点 F 在线段 PB 上, $PA = AC$.



若 $\frac{PF}{PB} = \frac{3}{4}$, 求证: $EF //$ 平面 ABC .