

01空间几何体

一、空间几何体

1. 空间几何体的定义

空间中的物体都占据着空间的一部分，如果我们只考虑物体的**形状和大小**，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形叫做空间几何体。

2. 多面体的基本概念



定义及组成元素

1. 定义: 由若干个**平面多边形**围成的几何体叫做多面体

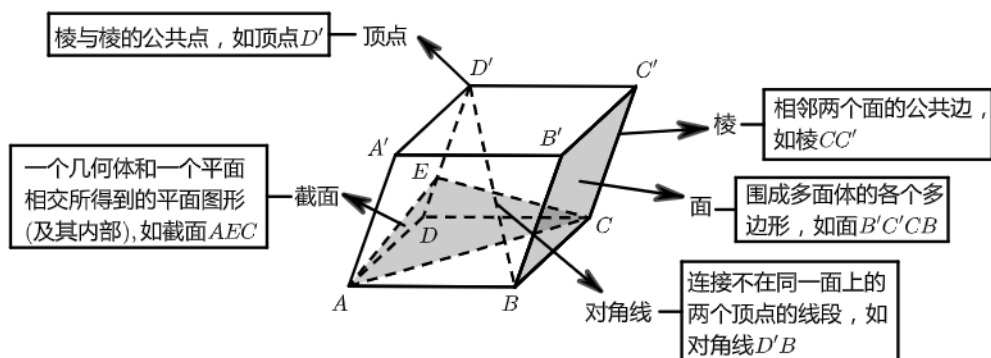
2. 组成元素: 围成多面体的**各个多边形**叫做多面体的**面**

相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**

棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**

连结不在同一个面上的两个顶点的线段叫做多面体的**对角线**

几何体和一个平面相交所得的平面图形（包括它的内部），叫做这个几何体的**截面**





多面体的分类

①按凹凸性分类（扩展）：

把一个多面体的任意一个面延展成平面，如果其余的各面都在这个平面的同一侧，则这样的多面体就叫做**凸多面体**，否则就叫做**凹多面体**。

②按面数分类：

一个多面体至少有四个面，多面体**按照它的面数**分别叫做**四面体、五面体、六面体**等等。

3. 旋转体的基本概念

1. 定义：由一个平面图形绕着它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体叫做旋转体

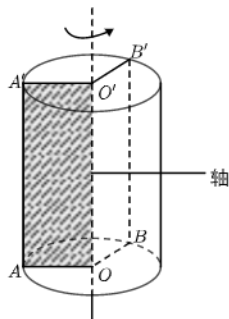
2. 组成元素：平面图形**旋转时所围绕的定直线**叫旋转体的**轴**

轴的长即为该旋转体的**高**

垂直于轴的边旋转而成的**圆面**叫做**底面**

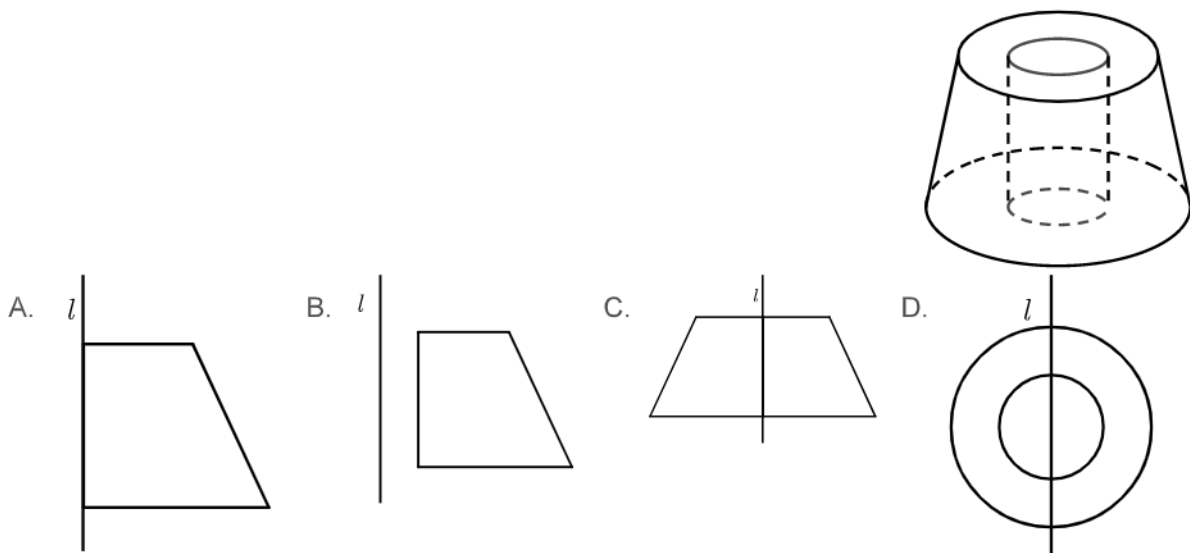
不垂直于轴的边旋转而成的**曲面**叫做**侧面**；

无论旋转到什么位置，这条边都叫做圆侧面的**母线**



4. 例题精讲

- 1 如图，某工厂生产的一种机器零件原胚的直观图是一个中空圆台，中空部分呈圆柱形状，且圆柱底面圆心与圆台底面圆心重合，该零件原胚可由下面图形绕对称轴（直线 l ）旋转而成，这个图形是（ ）。



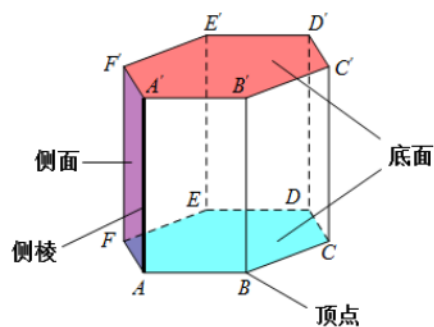
二、常见多面体

1. 棱柱



定义、图形及表示

一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做**棱柱**。
记作：棱柱 $ABCDEF - A'B'C'D'E'F'$ 。



相关概念

底面（底）：两个互相平行的面；

侧面：其余各面；

侧棱：相邻侧面的公共边；

顶点：侧面与底面的公共点

对角线：棱柱中不在同一平面上的两个顶点的连线（ AD' ）

对角面：过不相邻的两条侧棱的截面（ $ACC'A'$ ）

结构特点

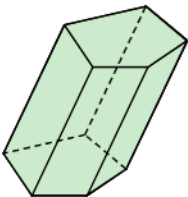
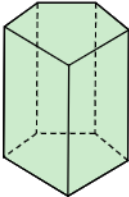
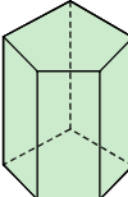
- （1）底面互相平行且全等；
- （2）侧面都是平行四边形；
- （3）侧棱都相等且互相平行

分类

1.棱柱可以**按底面的边数**进行分类：底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……

2.**侧棱与底面垂直**的棱柱是**直棱柱**，否则为**斜棱柱**；

底面为正多边形的直棱柱是正棱柱。

名称	棱柱	直棱柱	正棱柱
图形			
定义	有两个面互相平行，其余各面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的多面体	侧棱垂直于底面的棱柱	底面是正多边形的直棱柱
侧面的形状	平行四边形	矩形	全等的矩形

特殊的棱柱

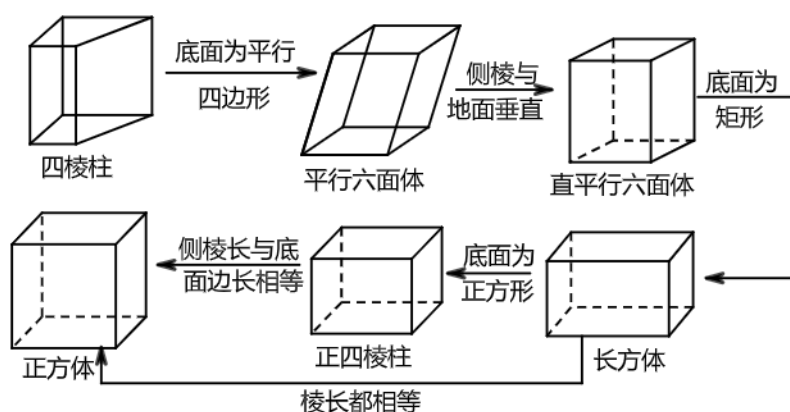
平行六面体：底面是平行四边形的棱柱

直平行六面体：侧棱与底面垂直的平行六面体叫直平行六面体

长方体：底面是矩形的直平行六面体是长方体

正方体：棱长都相等的长方体是正方体

常见几种四棱柱之间的转化关系



长方体的特点

长方体一条体对角线的长的平方等于一个顶点上三条棱的长的平方和，

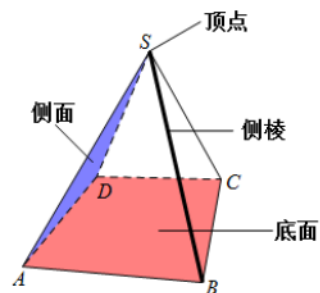
即 $l^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ，其中 l 为长方体的体对角线的长， a, b, c 分别为长方体的长、宽、高。

2. 棱锥

定义、图形及表示

一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做**棱锥**

记作：棱锥 $S - ABCD$





相关概念

底面（底）：多边形面

侧面：有公共顶点的各个三角形面

侧棱：相邻侧面的公共边

顶点：各侧面的公共顶点



结构特点

（1）**底面是一个多边形；**

（2）**侧面都是三角形；**

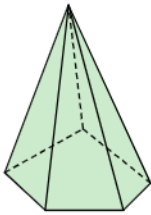
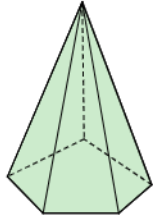
（3）**侧面有一个公共顶点**



分类

1.按**底面的边数**分类：底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中三棱锥又叫四面体。

2.如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面上的射影是底面的中心，这样的棱锥叫做**正棱锥**。

名称	棱锥	正棱锥
图形		
定义	有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形的多面体	底面是正多边形,顶点在过底面中心且垂直于底面的直线上的棱锥
侧棱	相交于一点但不一定相等	相交于一点且相等
侧面的形状	三角形	全等的等腰三角形(注:各侧面三角形的高叫做正棱锥的斜高)
过不相邻两条侧棱的截面的形状	三角形	等腰三角形
平行于底面的截面的形状	与底面相似的多边形	与底面相似的正多边形



正三棱锥与正四面体的区别

正三棱锥：底面为等边三角形，侧面一定为等腰三角形，且顶点在底面上的投影为底面的中心。

正四面体：底面与侧面都是等边三角形，且顶点在底面上的投影为底面的中心。

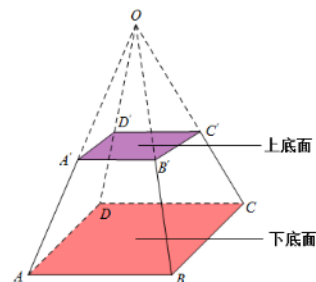
3. 棱台



定义、图形及表示

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥从而得到底面与截面之间的部分，这样的多面体叫做**棱台**

记作：棱台 $ABCD - A'B'C'D'$ 。



相关概念

上底面：原棱锥的截面；

下底面：原棱锥的底面；

侧面：其余各面；

侧棱：相邻侧面的公共边；

顶点：侧面与上（下）底面的公共顶点



结构特点

(1) 上、下底面互相平行且是相似图形

(2) 各侧棱的延长线交于点

(3) 各侧面为梯形



分类

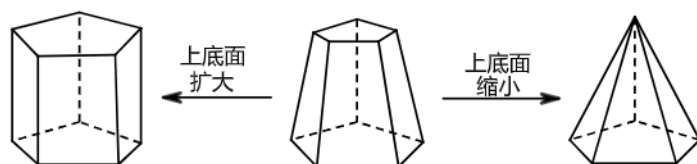
1. 由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台。
2. 由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**。

名称	棱台	正棱台
图形		
定义	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分	由正棱锥截得正棱台
侧棱	延长线交于一点	相等且延长线交于一点
侧面的形状	梯形	全等的等腰梯形 (注:各侧面 等腰梯形 的高叫做正棱台的 斜高)
过侧棱截面的形状	梯形	等腰梯形
平行于底面截面的形状	与底面相似的多边形	与底面相似的正多边形

4. 棱柱、棱锥、棱台之间的关系

当棱台的上底面与下底面相同时，棱台就转化为棱柱；

当棱台的上底面收缩为一个点时，棱台就转化为棱锥。



5. 例题精讲

2 连接正方体相邻各面的中心（所谓中心是指各面所在正方形的两条对角线的交点），所得的一个几何体是（ ）。

- A. 四面体 B. 六面体 C. 八面体 D. 十面体

3 一个三棱锥是正三棱锥的充要条件是（ ）。

- A. 底面是正三角形，三个侧面是全等的等腰三角形
B. 各个面都是正三角形
C. 三个侧面是全等的等腰三角形
D. 顶点在底面上的射影为重心

4 下列几何体中，顶点总数最多的是（ ）。

- A. 三棱柱 B. 四面体 C. 六棱锥 D. 四棱柱

5 下列命题是真命题的是（ ）。

- A. 有两个面相互平行，其余各面都是平行四边形的多面体是棱柱
B. 正四面体是四棱锥
C. 有一个面是多边形，其余各面都是三角形的多面体叫做棱锥
D. 正四棱柱是平行六面体

6. 课堂巩固

6 下列命题中正确的是（ ）。

- A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
- B. 有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体叫棱柱
- C. 用一个平面去截棱锥，底面与截面之间的部分组成的几何体叫棱台
- D. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

7 下列结论正确的是（ ）。

- A. 各个面都是三角形的几何体是三棱锥。
- B. 以三角形的一条边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫圆锥。
- C. 棱柱即是两个底面全等且其余各面都是矩形的多面体。
- D. 任何一个棱台都可以补一个棱锥使它们组成一个新的棱锥。

8 下列命题中正确的是（ ）。

- A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
- B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱
- C. 有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体叫棱柱
- D. 用一个平面去截棱锥，底面和截面之间的部分组成的几何体叫棱台

三、常见旋转体

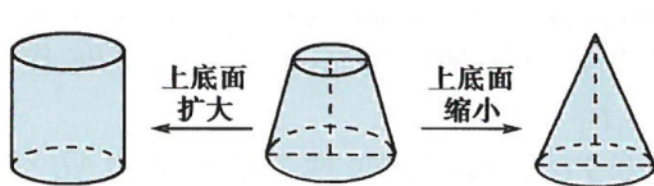
1. 圆柱、圆锥、圆台、球的相关概念

名称	圆柱	圆锥	圆台	球
图形及相关概念				
定义	以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱	以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴,其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥	用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面与截面之间的部分叫做圆台	以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体,简称球
表示	圆柱 OO'	圆锥 SO	圆台 OO'	球 O
底面	平行且全等的两个圆面	圆面	相似的两个圆面	无
轴线	过底面圆心且垂直于底面	过顶点和底面圆的圆心且垂直于底面	过上、下底面圆的圆心且垂直于底面	过球心
母线	平行、相等且垂直于底面	相交于一点	延长线交于一点	无
轴截面	全等的矩形	全等的等腰三角形	全等的等腰梯形	大圆
平行于底面的截面	与底面全等的圆面	圆面	圆面	无
侧面展开图	矩形	扇形	扇环	无
母线与底面圆的直径相等的圆柱、圆锥分别称为等边圆柱、等边圆锥				

2. 圆柱、圆锥、圆台之间的关系

当圆台的上底面与下底面相同时,圆台转化为圆柱;

当圆台的上底面缩小为一个点时,圆台转化为圆锥.如图所示.



3. 例题精讲

9 给出下列几个关于几何体的命题：

- ①任意一个棱柱的侧棱都相等，侧面都是全等的平行四边形；
- ②在圆柱上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
- ③以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆台；
- ④用任意一个平面截一个几何体，各个截面都是圆面，则这个几何体一定是球．

其中正确命题的个数有（ ）个．

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

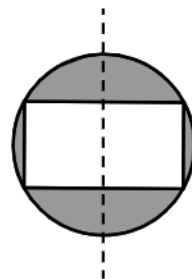
10 下列命题中正确命题的个数是（ ）．

- (1) 侧面都是等腰三角形的棱锥是正棱锥．
- (2) 三棱锥的三个侧面不可能都是直角三角形．
- (3) 直角三角形的直观图可能是直角三角形．
- (4) 圆台的任意两条母线延长后一定交于一点．

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 课堂巩固

11 如图阴影部分，绕中间轴旋转一周，形成的几何体形状为（ ）．



- A. 一个球体 B. 一个球体中间挖去一个圆柱
- C. 一个圆柱 D. 一个球体中间挖去一个棱柱

12 以下命题中正确的是（ ）．

- A. 以直角三角形的一直角边为轴旋转所得的旋转体是圆锥
- B. 以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台
- C. 有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫做棱锥
- D. 圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形的半径为圆锥底面圆的半径

四、常见几何体的表面积与体积

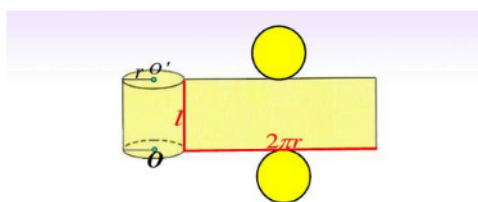
1. 柱体的表面积

圆柱

圆柱的侧面展开图是一个矩形。

如果圆柱的底面半径为 r ，母线长为 l ，那么圆柱的**底面积**（包括上底面和下底面）为 πr^2 ，**侧面积**为 $2\pi r l$ 。

因此，圆柱的**表面积**为二者之和，即 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r l = 2\pi r(r + l)$ 。



圆柱的侧面展开图是矩形

$$S_{\text{圆柱表面积}} = 2\pi r^2 + 2\pi r l = 2\pi r(r + l)$$

直棱柱

同理，直棱柱和圆柱的表面积一样算法，都为侧面积（底面周长乘以高）加上底面积

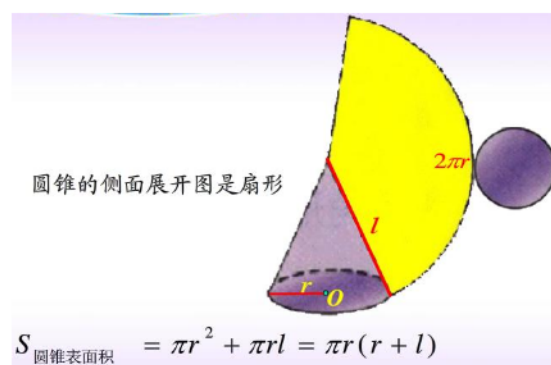
2. 锥体的表面积

圆锥

圆锥的侧面展开图是一个扇形。

如果圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，那么它的**底面积**为 πr^2 ，**侧面积**为 $\pi r l$ ，**表面积**

$$S = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)。$$



正棱锥

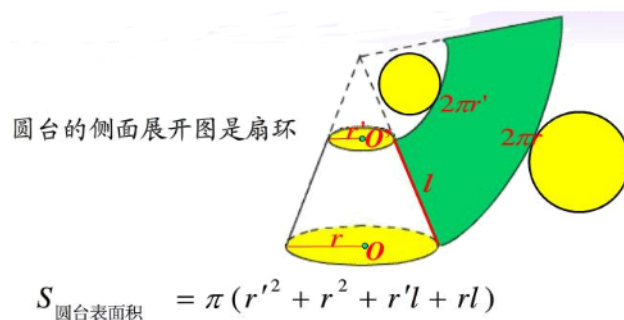
同理，正棱锥和圆柱的表面积一样算法，都为侧面积（底面周长和斜高乘积的一半）加上底面积

3. 台体的表面积

圆台

圆台的侧面展开图是一个扇环。

它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积，即 $S = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl)$ 。



正棱台

同理，正棱台和圆台的表面积算法一样，都为侧面积（上下底面周长之和与斜高乘积的一半）加上底面积

4. 球的表面积

如果球的半径为 R ，那么它的表面积 $S = 4\pi R^2$ 。

5. 柱体、锥体、台体、球的体积

柱体、锥体、台体的体积

几何体	体积
柱体	$V_{\text{柱体}} = Sh \quad (S \text{ 为底面面积, } h \text{ 为高})$ $V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 h \quad (r \text{ 为底面半径})$
椎体	$V_{\text{椎体}} = \frac{1}{3}Sh \quad (S \text{ 为底面面积, } h \text{ 为高})$ $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (r \text{ 为底面半径})$
台体	$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h \quad (S', S \text{ 分别为上、下底面面积, } h \text{ 为高})$ $V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3}\pi h(r'^2 + r'r + r^2) \quad (r', r \text{ 分别为上、下底面半径})$

球的体积

如果球的半径为 R ，那么它的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 。

祖暅原理的应用

等底面积、等高的柱体(或锥体)体积相等

6. 例题精讲

表面积

13 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 6cm ，顶点 P 到底面 ABC 的距离是 $\sqrt{6}\text{cm}$ ，则这个正三棱锥的侧面积为 ()。

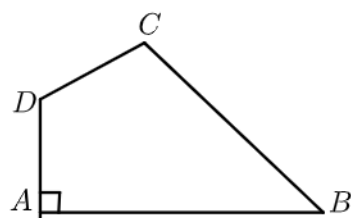
A. 27cm^2

B. $9\sqrt{3}\text{cm}^2$

C. $9\sqrt{6}\text{cm}^2$

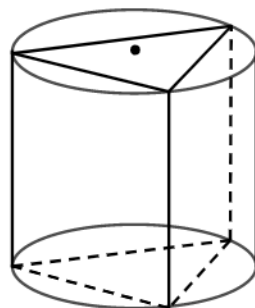
D. $9\sqrt{2}\text{cm}^2$

14 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 135^\circ$ ， $AB = 5$ ， $CD = 2\sqrt{2}$ ， $AD = 2$ ，则四边形 $ABCD$ 绕 AD 所在直线旋转一周所成几何体的表面积为 _____。



- 15 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，三条棱 AB ， AD ， AA_1 的中点分别为 E ， F ， G ，棱长为 a ，用平面 EFG 截去正方体一角后，剩余部分的表面积为 _____。

- 16 如图，圆柱内有一个直三棱柱，三棱柱的底面在圆柱底面内，且底面是正三角形。如果三棱柱的体积为 $12\sqrt{3}$ ，圆柱的底面直径与母线长相等，则圆柱的侧面积为 _____。



- 17 正三棱锥底面边长为 a ，高为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ ，则此正三棱锥的侧面积为 ()。

- A. $\frac{3}{4}a^2$ B. $\frac{3}{2}a^2$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$



体积

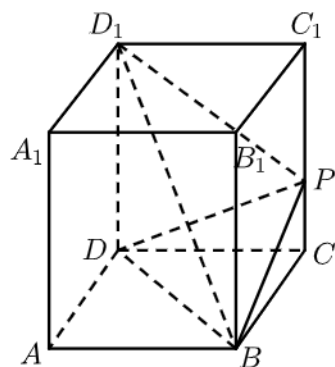
- 18 已知正三棱锥的侧面是面积为 1 的直角三角形，则该正三棱锥的体积为 _____。

- 19 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有 ()。



- A. 14斛 B. 22斛 C. 36斛 D. 66斛

- 20 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是侧棱 CC_1 上一点，且 $C_1P = 2PC$ 。设三棱锥 $P - D_1DB$ 的体积为 V_1 ，正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V ，则 $\frac{V_1}{V}$ 的值为 _____。

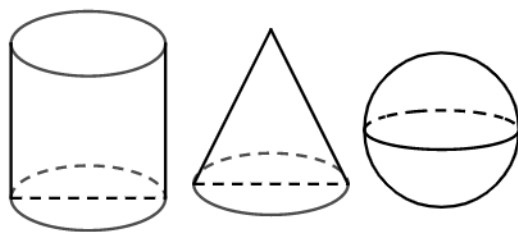


- 21 将若干毫升水倒入底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中，量得水面的高度为 6cm 。若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中，则水面的高度是（ ）。
- A. $6\sqrt[3]{3}\text{cm}$ B. 6cm
C. $2\sqrt[3]{18}\text{cm}$ D. $3\sqrt[3]{12}\text{cm}$

7. 课堂巩固

表面积

- 22 如图，一个圆柱和一个圆锥的底面直径和它们的高都与一个球的直径相等，这时圆柱、圆锥、球的表面积之比为（ ）。



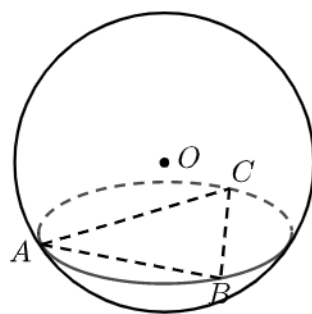
A. $6 : (\sqrt{5} + 1) : 4$

B. $6 : \sqrt{5} : 4$

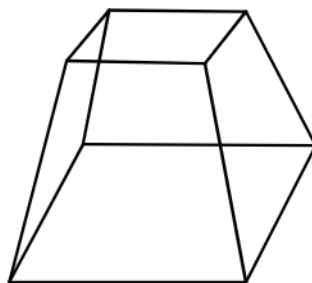
C. $5 : (\sqrt{5} + 1) : 4$

D. $5 : \sqrt{5} : 4$

- 23 如图, 已知正三角形 ABC 的三个顶点都在球 O 的球面上, 球心 O 到平面 ABC 的距离为1, 且 $AB = 3$, 则球 O 的表面积为 _____ .



- 24 如右图所示, 一个正四棱台, 上下底为正方形, 边长分别为4、8, 侧棱长为 $2\sqrt{2}$, 则该棱台的表面积为 () .



A. 128

B. 64

C. 92

D. $80 + 48\sqrt{2}$

- 25 已知圆锥的表面积为 $9\pi\text{cm}^2$, 且它的侧面展开图是一个半圆, 则圆锥的底面半径为 () .

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{cm}$

B. $3\sqrt{2}\text{cm}$

C. $\sqrt{3}\text{cm}$

D. $2\sqrt{3}\text{cm}$

- 26 已知正四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 其体积为 $\frac{4}{3}$, 若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点, 另一个底面的圆心为该棱锥的高的中点, 则该圆柱的表面积为 () .

A. π

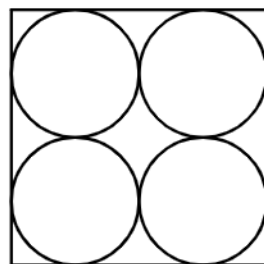
B. 2π

C. 4π

D. 6π

体积

- 27 麻团又叫煎堆，呈球形，华北地区称麻团，是一种古老的中华传统特色油炸面食，寓意团圆，制作时以糯米粉团炸起，加上芝麻而制成，有些包麻茸、豆沙等馅料，有些没有．一个长方体形状的纸盒中恰好放入4个球形的麻团，它们彼此相切，同时与长方体纸盒上下底和侧面均相切．其俯视图如图所示，若长方体纸盒的表面积为 576cm^2 ，则一个麻团的体积为 _____ cm^3 ．



- 28 把球的体积扩大到原来的2倍，那么表面积扩大到原来的（ ）．

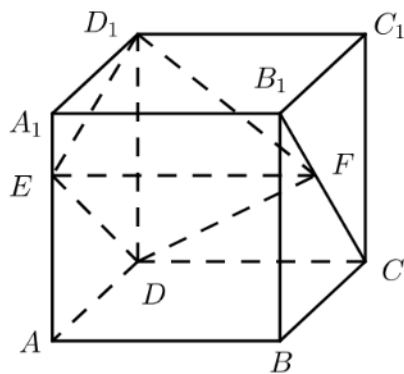
A. 2倍

B. $\sqrt[3]{4}$ 倍

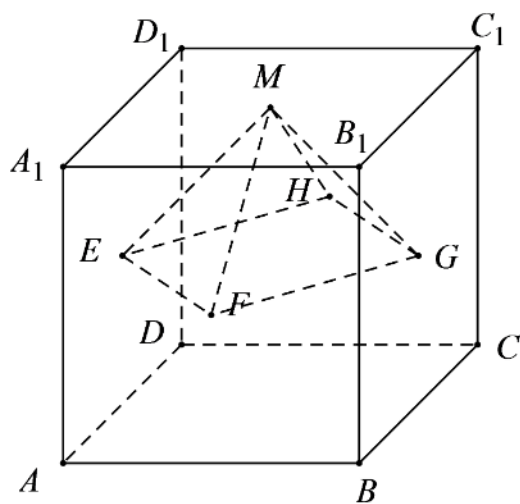
C. $\sqrt[3]{3}$ 倍

D. $\sqrt[3]{2}$ 倍

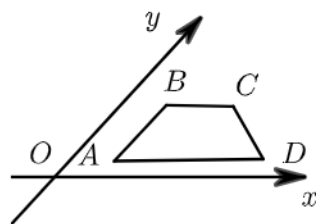
- 29 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1， E ， F 分别为线段 AA_1 ， B_1C 上的动点，则三棱锥 $D_1 - EDF$ 体积为 _____ ．



- 30 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E ， F ， G ， H ， M （如图），则四棱锥 $M - EFGH$ 的体积为 _____ ．



- 31 用斜二测画法画出的某平面图形的直观图如图, 边 AB 平行于 y 轴, BC 与 AD 平行于 x 轴, 已知四边形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{2}\text{cm}^2$, 则原平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.

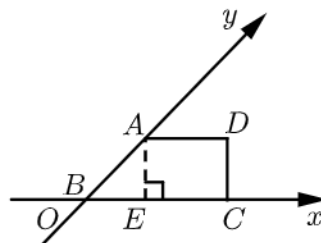


- 32 用“斜二测”画法画出 $\triangle ABC$ (A 为坐标原点, AB 在 x 轴上)的直观图为 $\triangle A'B'C'$, 则 $\triangle A'B'C'$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积比为()

A. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 33 有一块多边形的菜地它的水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形, 如图所示
 $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 2$, $AD = 1$, $DC \perp BC$, 则这块菜地的面积为() .



A. $2 + 2\sqrt{2}$

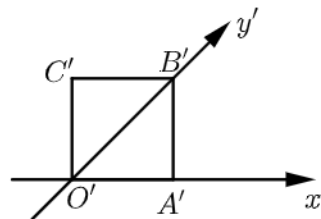
B. $4 + 2\sqrt{2}$

C. $2 + \sqrt{2}$

D. $1 + \sqrt{2}$

5. 课堂巩固

- 34 如图所示, 正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为1, 它是水平放置的一个平面图形的直观图, 则原图形的周长是() .



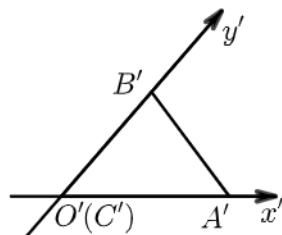
A. 6

B. 8

C. $2 + 3\sqrt{2}$

D. $2 + 3\sqrt{3}$

水平放置 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示，已知 $A'C' = 3$ ， $B'C' = 2$ ，则 AB 边上的中线的长度为_____.



36 下列命题中正确的有().

- ①一个棱柱至少有5个平面.
- ②正棱锥的侧面都是全等的等腰三角形.
- ③有两个面平行且相似，其他各面都是梯形的多面体是棱台.
- ④正方形的直观图是正方形.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

六、与球有关的切、接问题

球与其他几何体经常通过内切、外接等方式构成组合体，主要有球与柱、锥、台体的组合，即球内切于柱、锥、台体或球外接于柱、锥、台体.

1. 外接球问题



确定球心所在位置

1. 常用结论 (利用几何体特点找球心)

结论一、正方体或长方体的外接球的球心是其体对角线的中点.

结论二、正棱柱的外接球的球心是上下底面中心的连线的中点.

结论三、直三棱柱的外接球的球心是上下底面三角形外心的连线的中点.

结论四、正棱锥的外接球的球心在其高上，具体位置可通过计算找到.

结论五、若棱锥的顶点可构成共斜边的直角三角形，则公共斜边的中点就是其外接球的球心.

2. 构造正方体或长方体找球心

正方体或长方体的外接球的球心在其体对角线的中点处

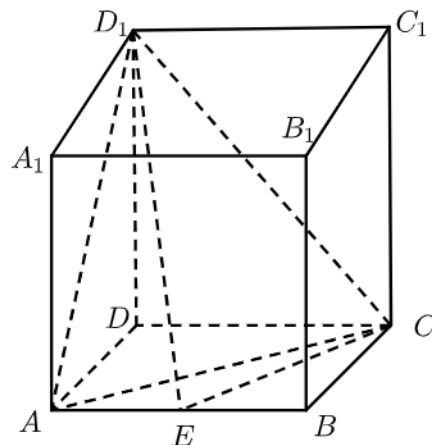
3. 利用球的定义确定球心

利用球心 O 与截面圆圆心 Q_1 的连线垂直于截面圆及球心 O 与弦中点的连线垂直于弦的性质，确定球心.

2. 例题精讲

- 37 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为8，面 $A_1B_1C_1D_1$ 在一个半球的底面上， A 、 B 、 C 、 D 四个顶点都在此半球的球面上，则此半球的体积为 _____ .

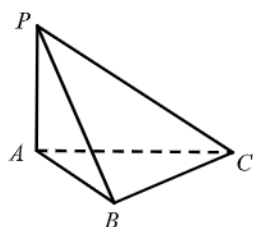
- 38 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是面积为2的正方形，该长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$ ，点 E 为棱 AB 的中点，则三棱锥 $D_1 - ACE$ 的体积是() .



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

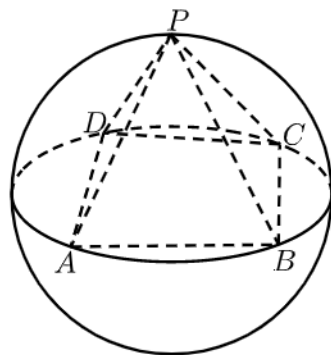
- 39 已知底面为正三角形的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $AB = AA_1 = 2$ ，则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 _____ .

- 40 如图，在三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $PA = 1$ ， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 外接球的表面积为 _____ .

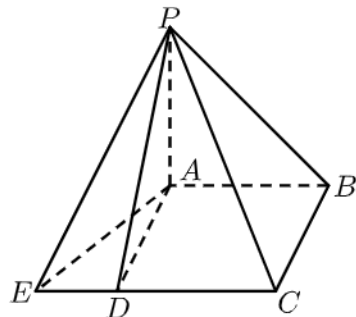


41 设三棱锥的三条侧棱两两互相垂直，且长度分别为 $2, 2\sqrt{3}, 4$ ，则其外接球的表面积为 _____ .

42 如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 底面的四个顶点 A, B, C, D 在球 O 的直径所在的大圆上，点 P 在球面上，如果球 O 的表面积是 16π ，则 $V_{P-ABCD} =$ _____ .



43 中国古代数学经典《九章算术》系统地总结了战国、秦、汉时期的数学成就，书中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．如图为一个阳马与一个鳖臑的合体，已知 $PA \perp$ 平面 $ABCE$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形， $AD = 2, ED = 1$ ，若鳖臑 $P-ADE$ 的外接球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$ ，则阳马 $P-ABCD$ 的外接球的表面积等于 _____ .



44 已知两个圆锥有公共底面，且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上．若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$ ，则这两个圆锥中，体积较小者的高与体积较大者的高的比值为 _____ .

3. 课堂巩固

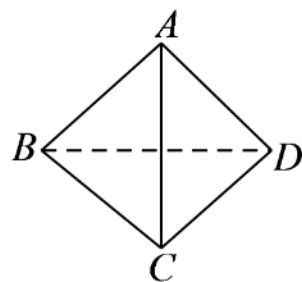
- 45 若一个球的体积是 $\frac{256\pi}{3}$ ，则该球的内接正方体的表面积是 _____ .
- 46 设所有棱长都为2的正三棱柱的顶点都在一个球面上，则该球的表面积为() .
- A. 4π B. 8π
C. 20π D. $\frac{28}{3}\pi$
- 47 已知四面体 $ABCD$ 的四个面都为直角三角形，且 $AB \perp$ 平面 BCD ， $AB = BD = CD = 2$ ，若该四面体的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为() .
- A. 3π B. $2\sqrt{3}\pi$ C. $4\sqrt{3}\pi$ D. 12π
- 48 若四棱锥 $P - ABCD$ 内接于球 O ，且底面 $ABCD$ 过球心 O ，设正四棱锥 $P - ABCD$ 的高为1，则该四棱锥的体积为 _____ .
- 49 正四棱锥的顶点都在同一球面上. 若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为 _____ .

4. 内切球问题

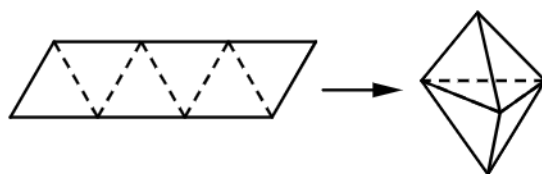
若一个多面体的各面都与一个球的球面相切，则称这个多面体是这个球的外切多面体，这个球是这个多面体的内切球，内切球球心到多面体各面的距离均相等

5. 例题精讲

- 50 正方体的表面积与其内切球的表面积之比为 _____ .
- 51 如图, 已知正四面体 $A-BCD$ 的高为 6, 则它的内切球的体积为 _____ .



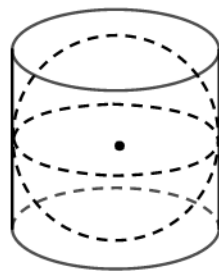
- 52 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粿，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为1的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为 _____ ；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为 _____ 。



- 53 一个半径为1的球在长、宽、高分别为10、8、6的封闭长方体箱子里运动，球始终不能到达的空间的体积是 _____ 。

6. 课堂巩固

- 54 如图所示是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等，相传这个图形表达了阿基米德最引以为自豪的发现．我们来重温这个伟大发现，圆柱的表面积与球的表面积之比为 _____ 。



55 在封闭的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB \perp BC$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AA_1 = 3$, 则 V 的最大值是 ().

A. 4π

B. $\frac{9\pi}{2}$

C. 6π

D. $\frac{32\pi}{3}$