

解三角形综合

一、解三角形综合问题

1. 知识讲解

利用正弦定理，余弦定理解三角形的综合问题时，要注意三角形三个内角的一些三角函数关系：

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，则

$$\textcircled{1} \sin A = \sin(B+C), \cos A = -\cos(B+C),$$

$$\tan A = -\tan(B+C).$$

$$\textcircled{2} \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}, \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin 2A = -\sin(2B+2C), \cos 2A = \cos(2B+2C),$$

$$\tan 2A = -\tan(2B+2C).$$

$$\textcircled{4} \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$\textcircled{5} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C.$$

2. 例题精讲

正余弦定理综合

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边为 a, b, c .

(1) $a = 4, A = 30^\circ, B = 60^\circ$ ，求 b .

(2) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1, c = 2$ ，试求 A .

【答案】 (1) $b = 4\sqrt{3}$.

(2) $A = 60^\circ$.

【解析】 (1) 由正弦定理知，

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B}, \\ \frac{4}{\sin 30^\circ} &= b \sin 60^\circ, \\ \therefore 2\sqrt{3} &= \frac{1}{2}b, \end{aligned}$$

$$\therefore b = 4\sqrt{3}.$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$3 = 1 + 4 - 4 \cos A.$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

【标注】 【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角

求面积

2. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2$ 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{3}.$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】 (1) 对 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$ 两边同除 $2R$,

$$\text{有 } \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A,$$

$$\sin A = \sqrt{3} \cos A,$$

虽然 $\cos A \neq 0$ 同除 $\cos A$,

$$\tan A = \sqrt{3},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

$$7 = 4 + c^2 - 2c,$$

$$c^2 - 2c - 3 = 0,$$

$$(c - 3)(c + 1) = 0,$$

边 c 应为正值, $c = 3$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理；三角形面积公式

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $c \sin \left(A + \frac{\pi}{3}\right) - a \sin C = 0$.

(1) 求角 A 的值.

(2) 若 $a = 2\sqrt{7}$, $b = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $6\sqrt{3}$.

【解析】(1) $\because c \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) - a \sin C = 0$,
 $\therefore \sin C \left(\sin A \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos A \right) - \sin A \sin C = 0$,
 $\therefore \angle C \in (0, \pi)$,
 $\therefore \sin C > 0$,
 $\therefore \frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A - \sin A = 0$,
 $\therefore \tan A = \sqrt{3}$,
又 $\because A \in (0, \pi)$,
 $\therefore A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,
 $28 = 16 + c^2 - 2 \times 4c \times \frac{1}{2}$,
 $\therefore c^2 - 4c - 12 = 0$,
 $(c - 6)(c + 2) = 0$,
 $\because c > 0$,
 $\therefore c = 6$,
 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $= 6\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；三角形面积公式

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a \neq b$, $c = \sqrt{3}$, $\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$.

(1) 求 C .

(2) 若 $\sin A = \frac{4}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{18 + 8\sqrt{3}}{25}$.

【解析】(1) $\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$,
 $\frac{1 + \cos 2A}{2} - \frac{1 + \cos 2B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B$,

$$\cos 2A - \cos 2B = \sqrt{3} \sin 2A - \sqrt{3} \sin 2B,$$

$$\sqrt{3} \sin 2B - \cos 2B = \sqrt{3} \sin 2A - \cos 2A,$$

$$\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\because a \neq b,$$

$$\therefore A \neq B,$$

$$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \pi - \left(2B - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore A + B = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore C = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \because \sin A = \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } A + B = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore A < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{3}{5},$$

$$\text{又 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin B = \sin[\pi - (A + C)],$$

$$= \sin(A + C),$$

$$= \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C,$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{C}{\sin C},$$

$$\text{得 } a = \frac{\sqrt{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{5},$$

$$\therefore S = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{25}.$$

【标注】 【知识点】三角形面积公式；二倍角公式化简求值综合运用

5. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \cos A(b \cos C + c \cos B) = \sqrt{3}a$.

(1) 求角 A .

(2) 若 $a = 1$, $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{5} + 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{6}$.

(2) $S_{\triangle ABC} = 2 - \sqrt{3}$.

【解析】 (1) 由 $2 \cos A(b \cos C + c \cos B) = \sqrt{3}a$,

可得 $2 \cos A(\sin B \cos C + \sin C \cos B) = \sqrt{3} \sin A$,

可得 $2 \cos A \sin A = \sqrt{3} \sin A$,

$$\therefore A \in (0, \pi)$$

$$\therefore \sin A = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 由题意知, $a = 1, a + b + c = \sqrt{5} + 1$,

$\therefore b + c = \sqrt{5}$, 由余弦定理得:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$$

$$= (b + c)^2 - (2 + \sqrt{3})bc$$

$$= 1,$$

$$\therefore bc = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} = 4(2 - \sqrt{3}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 2 - \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】SAS类三角形(利用余弦定理); 三角形面积公式

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C + \cos A \cos B = 2 \cos A \sin B$.

(1) 求 $\tan A$.

(2) 若 $b = 2\sqrt{5}$, AB 边上的中线 $CD = \sqrt{17}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $\tan A = 2$.

(2) 当 $c = 2$ 时, $S_{\triangle ABC} = 4$; 当 $c = 6$ 时, $S_{\triangle ABC} = 12$.

【解析】 (1) 由已知得 $\cos C + \cos A \cos B = \cos [\pi - (A + B)] + \cos A \cos B$

$$= -\cos(A + B) + \cos A \cos B = \sin A \sin B,$$

$$\text{所以} \sin A \sin B = 2 \cos A \sin B,$$

因为在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B \neq 0$,

$$\text{所以} \sin A = 2 \cos A,$$

$$\text{则} \tan A = 2.$$

(2) 由(1)得, $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\text{在} \triangle ACD \text{中}, CD^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos A,$$

$$\text{代入条件得} c^2 - 8c + 12 = 0, \text{解得} c = 2 \text{或} 6,$$

$$\text{当} c = 2 \text{时}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 4; \text{当} c = 6 \text{时}, S_{\triangle ABC} = 12.$$

【标注】 【知识点】和差角公式化简求值综合运用; SSA类三角形(利用余弦定理)

 求边长

7. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C = b + c$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 b 与 c 的值.

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 3 \\ c = 2 \end{cases}.$$

【解析】 (1) $\because a \cos C + \sqrt{3}a \sin C = b + c$,

由正弦定理得: $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C$,

即 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A + C) + \sin C$,

化简得: $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$,

$$\therefore \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

在 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \pi$,

$$\therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 得 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由已知得 $\frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 可得 $bc = 6$,

由已知及余弦定理得 $b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7$, $(b + c)^2 = 25$, $b + c = 5$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} bc = 6 \\ b + c = 5 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 3 \\ c = 2 \end{cases}.$$

【标注】 【知识点】SAS类三角形(利用余弦定理); 三角形面积公式

8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \sin A - \sin B - 2 \sin C \cos B = 0$.

(1) 求内角 C 的大小.

(2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{3}$, 面积为 $2\sqrt{3}$. 求边 c 的长度.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

$$(2) 2\sqrt{3}.$$

【解析】 (1) 由 $2 \sin A - \sin B - 2 \sin C \cos B = 0$ 得:

$$2 \sin(B + C) - \sin B - 2 \sin C \cos B = 0,$$

$$\text{整理得: } 2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C - \sin B - 2 \sin C \cos B = 0,$$

$$\text{故 } \cos C = \frac{1}{2}, \text{ 而 } C \in (0, \pi), \text{ 从而 } C = \frac{\pi}{3}.$$

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

(2) 由条件知： $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, 得 $ab = 8 \dots\dots ①$

又 $a + b + c = 6 + 2\sqrt{3} \dots\dots ②$

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 3ab \dots\dots ③$

将①代入③得： $(a + b + c)(a + b - c) = 24 \dots\dots ④$

由②④得： $c = 2\sqrt{3}$.

故答案为： $2\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

求周长

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$.

(1) 求角 C .

(2) 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $5 + \sqrt{7}$.

【解析】 (1) $\because 2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$,

$$\therefore 2 \cos C(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin C ,$$

$$\text{即 } 2 \cos C \sin(A + B) = \sin C ,$$

$$\because A + B + C = \pi ,$$

$$\therefore 2 \cos C \sin C = \sin C ,$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3} .$$

(2) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore ab = 6 , \text{ 又 } c = \sqrt{7} ,$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13 ,$$

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25 ,$$

$$\therefore a + b = 5 \text{ (负值舍去)} , \text{ 故 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a + b + c = 5 + \sqrt{7} .$$

【标注】 【知识点】 边角互化 (利用正弦定理) ; SSS类三角形 (利用余弦定理) ; 三角形面积公式

 与三角函数结合

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a > b, a = 5, \sin B = \frac{3}{5}$, $\triangle ABC$ 的面积为9.

(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $b = \sqrt{13}, \sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

(2) $\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

【解析】 (1) $\because S_{\triangle ABC} = 9$,

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = 9,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5c \cdot \frac{3}{5} = 9,$$

$$\therefore c = 6,$$

$$\therefore b < a,$$

$$\therefore \angle B \text{ 为锐角 },$$

$$\text{又} \because \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos B = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ &= 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$= 61 - 48$$

$$= 13,$$

$$\therefore b = \sqrt{13},$$

$$\text{又} \because \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{13}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{\sin A},$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$25 = 13 + 36 - 2 \times 6 \times \sqrt{13} \cos A,$$

$$\therefore 12\sqrt{13} \cos A = 24,$$

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin 2A &= 2 \sin A \cdot \cos A = 2 \times \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}, \\
 \cos 2A &= 2\cos^2 A - 1 = \frac{8}{13} - 1 = -\frac{5}{13}, \\
 \sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2A \\
 &= \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{13} \\
 &= \frac{7\sqrt{2}}{26}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 半角公式；二倍角的余弦；正余弦定理综合求解边角；余弦定理；正弦定理

11. 已知向量 $\vec{a} = \left(\sin x, \frac{3}{4}\right)$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$.

(1) 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 求 $\cos^2 x - \sin 2x$ 的值.

(2) 设函数 $f(x) = 2(a+b) \cdot b$, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, $\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $f(x) + 4 \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ ($x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$) 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{8}{5}$.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \leq f(x) + 4 \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

【解析】 (1) $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\therefore \frac{3}{4} \cos x + \sin x = 0$, $\therefore \tan x = -\frac{3}{4}$,
 $\therefore \cos^2 x - \sin x = \frac{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1 - 2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{8}{5}$.

(2) $f(x) = 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$,

由正弦定理得: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore A = \frac{\pi}{4}$ ($a = \sqrt{3} < b = 2$),

$\therefore f(x) + 4 \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$,

$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{11}{12}\pi\right]$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \leq f(x) + 4 \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式；求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质

12. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 且 $\sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin B, a = 2$.
则边长 b 的取值范围是 ().
- A. $(0, \sqrt{3})$ B. $(0, 2\sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ D. $(\sqrt{3}, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 $\because \sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin B$,
 $\therefore \sqrt{3}(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = 2 \sin C \sin B$,
 $\therefore \sqrt{3} \sin(A + B) = 2 \sin C \sin B$,
 $\therefore \sqrt{3} \sin C = 2 \sin C \sin B$,
 $\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore B = \frac{\pi}{3}$ 或 $B = \frac{2\pi}{3}$,
 $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形,
 $\therefore B = \frac{\pi}{3}$,
 $\therefore \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{1}{2} < \sin A < 1$,
 由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, 则 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin A}$,
 此时 $\sqrt{3} < b < 2\sqrt{3}$,
 综上所述 b 的取值范围为 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.
 故选: C.

【标注】 【知识点】 求边长相关最值或范围问题

13. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(a - b)(\sin A + \sin B) = (c - b) \sin C$,
若 $a = \sqrt{3}$, 则 $b^2 + c^2$ 的取值范围是 ().
- A. $(5, 6]$ B. $(3, 5)$ C. $(3, 6]$ D. $[5, 6]$

【答案】 A

【解析】 $\because (a - b)(\sin A + \sin B) = (c - b) \sin C$,
 由正弦定理可得: $(a - b)(a + b) = (c - b)c$,
 化为 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.
 由余弦定理可得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,

$$\because a = \sqrt{3}, \therefore \text{由正弦定理可得: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

$\therefore$ 可得:

$$b^2 + c^2 = (2\sin B)^2 + \left[2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)\right]^2 = 3 + 2\sin^2 B + \sqrt{3}\sin 2B = 4 + 2\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$, \because B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore 2B - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \therefore b^2 + c^2 = 4 + 2\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in (5, 6].$$

故选A.

【标注】 【知识点】SSS类三角形（利用余弦定理）；边角互化（利用正弦定理）

14. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}, b = 1$, 求 $a + c$ 的取值范围 ().

A. $(1, \sqrt{3})$

B. $(\sqrt{3}, 2]$

C. $(1, 2]$

D. $(1, 2)$

【答案】 C

【解析】 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$

$$\therefore a + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \right] = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\because 0 < A < \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore a + c = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \in (1, 2].$$

故选：C.

【标注】 【知识点】边角互化（利用正弦定理）；求边长相关最值或范围问题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $2\sqrt{2}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)\sin B$, $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\sqrt{2}$. 则 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 ____ .

【答案】 $3\sqrt{6}$

【解析】 因为 $2\sqrt{2}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)\sin B$, $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\sqrt{2}$,

$$\text{所以} (2\sqrt{2})^2 (\sin^2 A - \sin^2 C) = (a - b)2\sqrt{2}\sin B,$$

所以 $a^2 - c^2 = ab - b^2$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$$

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \triangle ABC \text{ 的周长 } l &= a + b + c = 2\sqrt{2}(\sin A + \sin B + \sin C), \\ &= 2\sqrt{2}\left(\sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{6} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{6}, \end{aligned}$$

因为 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1,$$

所以 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 $3\sqrt{6}$,

故答案为: $3\sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】求边长相关最值或范围问题; 边角互化 (利用正弦定理)

16. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $c = 2\sqrt{3}$,

$\tan A + \tan B = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan A \tan B$, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围是 ().

- A. $[\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, \sqrt{3}]$ C. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 $\tan A + \tan B = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan A \tan B$, 得 $\tan A + \tan B = \sqrt{3}(1 - \tan A \tan B)$,

$$\therefore \tan(A+B) = \sqrt{3}, \text{ 即 } \tan C = -\sqrt{3},$$

$$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{则 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } c = 2\sqrt{3}, \text{ 由余弦定理可得: } (2\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 + ab = 12,$$

$$\therefore 12 = a^2 + b^2 + ab \geq 3ab, \text{ 得 } ab \leq 4,$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积取值范围是 } (0, \sqrt{3}].$$

故选 B.

【标注】 【知识点】求面积最值或范围问题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\sin C}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-c}$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$, 且线段 $AD = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

【解析】(1) $\because \frac{\sin C}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-c}$,

由正弦定理 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = 2R$,

得 $\frac{c}{a-b} = \frac{a+b}{a-c}$,

$\therefore c(a-c) = (a+b)(a-b)$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

又 $\because a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$,

代入得 $\cos B = \frac{1}{2}$,

$\because B \in (0, \pi)$,

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理知:

$$c^2 + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot c \cdot \cos 60^\circ = 3^2,$$

$$\therefore (2a)^2 + c^2 - 2ac = 9,$$

$$\therefore 4ac \leq (2a)^2 + c^2,$$

$$\therefore 2ac \leq 9,$$

当且仅当 $2a = c$, 即 $a = \frac{3}{2}$, $c = 3$ 时取等号,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积的最大值为 } \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

【标注】【知识点】求面积最值或范围问题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 向量 $\vec{m} = (a+b, \sin A - \sin C)$, 向量 $\vec{n} = (c, \sin A - \sin B)$, 且 $\vec{m} // \vec{n}$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 设 BC 的中点为 D , 且 $AD = \sqrt{3}$, 求 $a + 2c$ 的最大值.

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) $a + 2c$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$.

【解析】(1) 由 $\vec{m} // \vec{n}$ 得 $(a+b) \cdot (\sin A - \sin B) = (\sin A - \sin C) \cdot c$,

结合正弦定理有 $(a+b) \cdot (a-b) = (a-c) \cdot c$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

结合余弦定理有 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$,

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得

$$\frac{1}{2} = \cos B = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 3}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c} , \text{ 即 } 2ac + 12 = a^2 + 4c^2 ,$$

有 $2ac + 12 = a^2 + 4c^2 \geq 4ac$, 从而 $ac \leq 6$,

$(a+2c)^2 = a^2 + 4c^2 + 4ac = 6ac + 12 \leq 6 \cdot 6 + 12 = 48$, 当且仅当 $a = 2c$ 时取 “=” ,

所以 $a+2c \leq 4\sqrt{3}$, 所以 $a+2c$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

19. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 的对边, $\cos C + \sqrt{3} \sin C - a - c = 0$, 且 $b = 1$.

(1) 若 $a+c=2$, 求 a 与 c .

(2) 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围 .

【答案】 (1) $a=1$, $c=1$.

(2) $(2, 3]$.

【解析】 (1) 当 $a+c=2$ 时, $\cos C + \sqrt{3} \sin C - a - c = 0$,

$$\cos C + \sqrt{3} \sin C = 2 ,$$

$$\frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C = 1 ,$$

$$\text{即: } \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 1 ,$$

$\because$ 锐角三角形 $\triangle ABC$,

$$\therefore 0 < C < \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3} ,$$

$$\text{由余弦定理得: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} ,$$

$$\therefore b = 1 ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{a^2 + 1 - c^2}{2a} ,$$

$$\therefore a^2 - c^2 + 1 = a ,$$

$$\therefore a + c = 2 , \text{ 即 } c = 2 - a ,$$

$$\therefore a^2 - (2-a)^2 + 1 = a,$$

$$\text{得: } a = 1,$$

$$\therefore c = 2 - a = 1,$$

$$\text{即: } a = 1, c = 1.$$

$$(2) \cos C + \sqrt{3} \sin C - a - c = 0,$$

$$\therefore a + c = \sqrt{3} \sin C + \cos C = 2 \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\therefore 0 < C < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore C + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi \right),$$

$$\therefore \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right],$$

$$\therefore a + c = 2 \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) \in (1, 2],$$

$$\text{又: } b = 1,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = a + b + c \in (2, 3],$$

$$\text{即 } \triangle ABC \text{ 的周长的取值范围为 } (2, 3].$$

【标注】 【知识点】正余弦定理综合求解边角；求边长相关最值或范围问题

20. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c . 若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = 2$, $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

【答案】 (1) π .

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【解析】 (1) $\therefore f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$

$$\therefore \text{函数 } y = f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$(2) \therefore f\left(\frac{A}{2}\right) = 2 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) = 2,$$

$$\therefore \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) = 1,$$

$$\therefore 0 < A < \pi,$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6},$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3},$$

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$ ，即 $bc \leq a^2 = 1$ ，当且仅当 $b = c$ 时，等号成立，
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，
 即 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

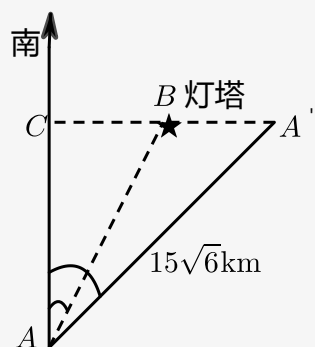
【标注】 【知识点】求正弦型函数的周期；求面积最值或范围问题

🔗 实际应用

21. 某船开始看见灯塔在南偏东 30° 方向，后来船沿南偏东 60° 的方向航行 $15\sqrt{6}\text{km}$ 海里后，看见灯塔在正西方向，则这时船与灯塔的距离是（ ）。
- A. 15km B. $15\sqrt{2}\text{km}$ C. $15\sqrt{3}\text{km}$ D. $15\sqrt{6}\text{km}$

【答案】 B

【解析】 如图：船由 A 到 A' ，



灯塔为 B ，即求 $A'B$ 。

延长 $A'B$ 交 AC 于 C ，

则 $A'C \perp AC$ ，

$$\therefore AC = \frac{15\sqrt{6}}{2} \text{ km}，$$

$$\therefore A'C = \frac{45\sqrt{2}}{2} \text{ km}，$$

$$\therefore BC = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ km}，$$

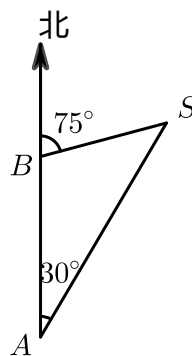
$$\therefore A'B = 15\sqrt{2} \text{ km}，$$

故选 B。

【标注】 【知识点】测量距离的问题

22.

如图，一艘船下午13:30在A处测得灯塔S在它的北偏东30°处，之后它继续沿正北方向匀速航行，14:00到达B处，此时又测得灯塔S在它的北偏东75°处，且与它相距 $9\sqrt{2}$ 海里，则此船的航速为（ ）海里/小时．



A. 18

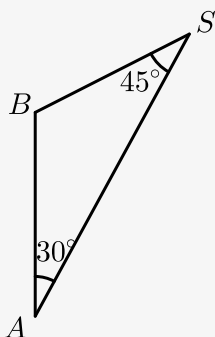
B. 24

C. 30

D. 36

【答案】 D

【解析】



∵外角等于两个不相邻的内角和，

$$\therefore 30^\circ + \angle S = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle S = 45^\circ,$$

$$\frac{BS}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ},$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\therefore AB = 18,$$

半小时行驶18海里，

$$\therefore \text{航速为 } \frac{18}{0.5} = 36 \text{ 海里/小时}.$$

故选：D．

【标注】 【知识点】测量距离的问题；正弦定理

23. 为测得河对岸塔AB的高，先在河岸上选一点C，使C在塔底B的正东方向上，测得点A的仰角为 60° ，再由点C沿北偏东 15° 方向走10米到位置D，测得 $\angle BDC = 45^\circ$ （如图所示），则塔AB的高

【答案】(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 30° .

(2) $\frac{6}{5}$, $\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$.

【解析】(1) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore \sin C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = 120^\circ,$$

$$\therefore 0^\circ < C < 60^\circ,$$

$$\therefore C = 30^\circ.$$

$$\therefore B = 180^\circ - A - C = 30^\circ = C,$$

$$\therefore b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) $\therefore \cos A = \frac{4}{5}$

$$\therefore A \in (0, \pi), \sin A = \frac{3}{5},$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得, $\frac{a}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2$,

$$\therefore a = \frac{6}{5}.$$

$\therefore$

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos \frac{\pi}{3} + \cos A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

,

$$\text{由 } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 2 \text{ 得, } c = 2 \times \frac{3+4\sqrt{3}}{10} = \frac{3+4\sqrt{3}}{5}.$$

【标注】【知识点】SSA类三角形(利用正弦定理); AAS类三角形(利用正弦定理)

求面积

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b \sin A = a \sin(B + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 若 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】(1) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$,

$$\therefore a = 2R \cdot \sin A, b = 2R \sin B,$$

$$\therefore \text{原式变为: } \sin A \sin B = \sin A \sin(B + \frac{\pi}{3}),$$

$$\sin A \sin B = \sin A (\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B),$$

$$\frac{1}{2} \sin A \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B = 0,$$

$$\sin A (\frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = 0,$$

$$\sin A \sin(B - \frac{\pi}{3}) = 0,$$

$$\therefore \sin A = 0 \text{ 或 } \sin(B - \frac{\pi}{3}) = 0,$$

$$\because A, B \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内角},$$

$$\therefore 0 < A < \pi, 0 < B < \pi,$$

$$\therefore \sin(B - \frac{\pi}{3}) = 0,$$

$$B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由余弦定理得,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$3 = 4 + c^2 - 4c \times \frac{1}{2},$$

$$\therefore c^2 - 2c + 1 = 0,$$

$$c = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B,$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理；三角形面积公式

26. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $a^2 + c^2 = b^2 + ac$ 。

(1) 求 $\cos B$ 的值。

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{7}$ ， $a = 8$ ，求 b 以及 $S_{\triangle ABC}$ 的值。

【答案】 (1) $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) $b = 7, 10\sqrt{3}$ 。

【解析】 (1) $\because a^2 + c^2 = b^2 + ac$,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - ac,$$

$$\begin{aligned}
& \text{又} \because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\
& \therefore 2 \cos B = 1, \\
& \therefore \cos B = \frac{1}{2}, \\
& \therefore B = \frac{\pi}{3}. \\
(2) & \because \cos A = \frac{1}{7}, A \in (0^\circ, 180^\circ), \\
& \therefore \sin A > 0, \\
& \therefore \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \\
& \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \\
& \frac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \\
& \therefore 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{7}b, \\
& \therefore b = 7, \\
& a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\
& 64 = 49 + c^2 - 2 \times 7 \times c \times \frac{1}{7}, \\
& \therefore c^2 - 2c = 15 = 0, \\
& (c - 5)(c + 3) = 0, \\
& \therefore c = 5 \text{ 或 } c = -3 \text{ (舍)}, \\
& S = \frac{1}{2}bc \sin A \\
& = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} \\
& = 10\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式

27. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2a \sin B = \sqrt{2}b$ 。

(1) 求角 A 的大小。

(2) 若 $a = 6, b + c = 8$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) $\angle A = \frac{\pi}{4}$ 。

(2) $7(\sqrt{2} - 1)$ 。

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

则 $a \sin B = b \sin A$ 。

$\therefore 2a \sin B = \sqrt{2}b$ ，

$$\therefore 2 \sin A \cdot \sin B = \sqrt{2}b,$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\therefore 0 < \angle A < \pi,$$

$$\therefore \angle A = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4}bc,$$

$$\text{条件中 } a = 6, \text{ 且 } b + c = 8, \angle A = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{并且 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2 + c^2 - 6^2}{2bc},$$

$$\therefore b^2 + c^2 - 36 = \sqrt{2}bc.$$

$$\therefore (b + c)^2 - 2bc = b^2 + c^2,$$

$$\therefore (b + c)^2 - 2bc - 36 = \sqrt{2}bc,$$

$$\therefore bc = \frac{8^2 - 36}{2 + \sqrt{2}},$$

$$\therefore bc = 14(2 - \sqrt{2}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 14(2 - \sqrt{2}) = 7(\sqrt{2} - 1).$$

【标注】 【知识点】正余弦定理综合求解边角

28. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 所对的边长分别为 a 、 b 、 c , 且 $(2b - \sqrt{3}c) \cos A = \sqrt{3}a \cos C$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若角 $B = \frac{\pi}{6}$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 因为 $(2b - \sqrt{3}c) \cos A = \sqrt{3}a \cos C$,

$$\text{所以 } (2 \sin B - \sqrt{3} \sin C) \cos A = \sqrt{3} \sin A \cos C,$$

$$2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin C \cos A,$$

$$2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin(A + C),$$

$$\text{则 } 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 于是 } A = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 由(1)知 $A = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{而 } B = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } AC = BC, C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{设 } AC = x, \text{ 则 } MC = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{又 } AM = \sqrt{7}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中由余弦定理得 } AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC \cos C = AM^2,$$

$$\text{即 } x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2x \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos 120^\circ = (\sqrt{7})^2,$$

$$\text{解得 } x = 2,$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】三角形面积公式；SAS类三角形（利用余弦定理）；边角互化（利用正弦定理）

求边长

29. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = \sqrt{3}b \sin A - a \cos B$.

(1) 求角 B 的值.

(2) 若 $b = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 a, c .

【答案】 (1) $B = 60^\circ$.

(2) $a = c = 2$.

【解析】 (1) $\because a = \sqrt{3}b \sin A - a \cos B,$

$$\therefore \sin A = \sqrt{3} \sin B \sin A - \sin A \cos B,$$

$$\because A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore 1 = \sqrt{3} \sin B - \cos B,$$

$$\therefore 2 \sin (B - 30^\circ) = 1,$$

$$\therefore \sin (B - 30^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B - 30^\circ = 30^\circ, \text{ 或 } 150^\circ,$$

$$\therefore B = 60^\circ \text{ 或 } 180^\circ \text{ (舍)},$$

$$\therefore B = 60^\circ.$$

(2) $\because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3},$

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2}ac \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\begin{aligned}
 ac &= 4, \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\
 4 &= (a+c)^2 - 2ac - ac, \\
 \therefore (a+c)^2 &= 16, \\
 \therefore a+c &= 4, \\
 \therefore a, c &\text{为方程 } x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 的2根}, \\
 \therefore a &= c = 2.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】三角形面积公式；余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

30. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sin(A+C) = \frac{8}{17}$, 且角 B 为锐角.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为2, 求边长 b .

【答案】 (1) $\cos B = \frac{15}{17}$.

(2) $b = 2$.

【解析】 (1) $\because \triangle ABC$ 中, $A+B+C = \pi$,

$$\therefore A+C = \pi - B,$$

$$\therefore \sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B = \frac{8}{17},$$

又角 B 为锐角,

$$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}.$$

(2) $\because \triangle ABC$ 的面积为2,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{4}{17}ac = 2, \text{ 则 } ac = \frac{17}{2},$$

$$\text{又 } a+c=6,$$

由余弦定理得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac(1 + \cos B) = 36 - 2 \times \frac{17}{2} \times \left(1 + \frac{15}{17}\right) = 4$$

,

$$\therefore b = 2.$$

【标注】 【知识点】三角形面积公式

31. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $b \sin 2A = a \sin B$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】 (1) $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 6.

【解析】 (1) 由 $b \sin 2A = a \sin B$, 得 $2b \sin A \cos A = a \sin B$.

由正弦定理得 $2 \sin B \sin A \cos A = \sin A \sin B$.

由于 $\sin A \sin B \neq 0$,

$$\text{则 } \cos A = \frac{1}{2}.$$

$\because 0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

又 $a = 2$, 则 $4 = b^2 + c^2 - bc$.

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$.

$$\text{即 } (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 8 + 8 = 16.$$

得 $b+c=4$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为6.

【标注】 【知识点】SAS类三角形 (利用余弦定理)

与三角函数综合

32. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $B = \frac{\pi}{4}$, $c = 3\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 的面积为6.

(1) 求 b 及 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $b = \sqrt{10}$, $\sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

【解析】 (1) 由已知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B$,

$$\therefore 6 = \frac{1}{2}a \cdot 3\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\text{且 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\therefore b^2 = 16 + 18 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10,$$

$$\therefore b = \sqrt{10},$$

$$\text{在} \triangle ABC \text{中}, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{4}{\sin A} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\therefore \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(2) \because a < c,$$

$$\therefore 0 < A < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{又} \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin \left(2A - \frac{\pi}{6} \right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3}{5} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}.$$

【标注】【知识点】余弦定理；三角形面积公式；正余弦定理综合求解边角；计算任意角的三角函数值；半角公式；两角和与差的正弦

$$33. \text{ 已知 } f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2 x.$$

$$(1) \text{ 若 } f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{10}, \text{ 求 } \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 的值.}$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 角 } A, B, C \text{ 所对应的边分别为 } a, b, c, \text{ 若有 } (2a - c) \cos B = b \cos C, \text{ 求角 } B \text{ 的大小以及 } f(A) \text{ 的取值范围.}$$

$$\text{【答案】} (1) -\frac{7}{25}.$$

$$(2) B = \frac{\pi}{3}; f(A) \text{ 的取值范围是 } \left(-1, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{【解析】} (1) f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{10},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5},$$

所以

$$\begin{aligned} & \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{7}{25}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 因为 } (2a - c) \cos B = b \cos C,$$

由正弦定理得：

$$(2\sin A - \sin C) \cos B = \sin B \cos C,$$

$$\text{所以 } 2\sin A \cos B - \sin C \cos B = \sin B \cos C,$$

$$\text{即 } 2\sin A \cos B = \sin(B + C) = \sin A,$$

$$\text{因为 } \sin A > 0,$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } A + C = \frac{2\pi}{3}, A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), 2A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\text{所以 } f(A) \text{ 的取值范围是 } \left(-1, \frac{1}{2}\right].$$

【标注】 【知识点】 半角公式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

最值问题

34. 在 $\triangle ABC$ 中， A, B, C 所对应的边 a, b, c ，且 $2a \sin A = (2b + c) \sin B + (2c + b) \sin C$ ，则 $\sin B + \sin C$ 的最大值为（ ）。

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 据正弦定理，由 $2a \sin A = (2b + c) \sin B + (2c + b) \sin C$ 可得 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ，再由余弦定理，可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ ，则 $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ ，

因此 $\sin B + \sin C = \sin B + \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right) = \frac{1}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B = \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$,
 又 $0 < \angle B < \frac{\pi}{3}$, 所以当 $\angle B = \angle C = \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin B + \sin C$ 取得最大值 1 .

【标注】 【知识点】求角相关的最值或范围问题

35. 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 2, b^2 + c^2 - bc = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围是 () .

- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ B. $(0, \sqrt{3}]$ C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$

【答案】 C

【解析】 $\because a = 2, b^2 + c^2 - bc = 4$,

$$\therefore \text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \text{由 } A \text{ 为锐角, 可得 } A = \frac{\pi}{3} , \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} , B + C = \frac{2\pi}{3} ,$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)} ,$$

$$\therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B, c = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B \times \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \frac{1}{2}\sin B \right)$$

$$= \sin 2B - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2B + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

$$\therefore B, C \text{ 为锐角, 可得: } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{6} < 2B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} ,$$

$$\therefore \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right] .$$

故选 : C .

【标注】 【知识点】求面积最值或范围问题

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $(3b - c)\cos A = a\cos C$.

(1) 求 $\cos A$.

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$.

(2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

【解析】(1) 由余弦定理及 $(3b - c) \cos A = a \cos C$

$$\text{可得: } (3b - c) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\text{整理得 } b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2}{3}bc,$$

$$\text{则 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{2}{3}bc}{2bc} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \text{ 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - 3}{2bc} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 = 3 + \frac{2}{3}bc,$$

$$\text{因为 } 3 + \frac{2}{3}bc = b^2 + c^2 \geq 2bc,$$

$$\text{所以 } bc \leq \frac{9}{4},$$

当且仅当 $b = c$ 时取 “=” ,

$$\text{因为 } \cos A = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S \text{ 的最大值为 } \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

【标注】【知识点】求面积最值或范围问题；边角互化（利用余弦定理）

37. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \cos C + \frac{1}{2}c = b$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 l 的取值范围.

【答案】(1) 60° .

(2) $(2, 3]$.

【解析】(1) $\because a \cos C + \frac{1}{2}c = b$,

$$\therefore \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C = \sin B,$$

$$\sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C),$$

$$= \sin A \cos C + \sin C \cos A,$$

且 $C \in (0, \pi)$,

$$\therefore \frac{1}{2} = \cos A, A \in (0, \pi),$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

(2) 解法1: 由正弦定理得: $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B$, $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin C$,

$$l = a + b + c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin B + \sin C),$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin B + \sin(A + B)) = 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B \right),$$

$$= 1 + 2 \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore B \in \left(0, \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\therefore B + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$\therefore \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right],$$

故 $\triangle ABC$ 的周长 l 的取值范围是 $(2, 3]$.

解法2: 周长 $l = a + b + c = 1 + b + c$,

由(1)及余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$$\therefore b^2 + c^2 = bc + 1,$$

$$\therefore (b + c)^2 = 1 + 3bc \leq 1 + 3 \left(\frac{b + c}{2} \right),$$

$$\therefore b + c \leq 2,$$

$$\text{又 } b + c > a = 1,$$

$$\therefore l = a + b + c \in (2, 3],$$

即 $\triangle ABC$ 的周长 l 的取值范围是 $(2, 3]$.

解法3:

由余弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $1 = b^2 + c^2 - bc$,

设 $b + c = t > a = 1$, 则 $b = t - c$, 代入上式消 b :

$$3c^2 - 3tc + t^2 - 1 = 0,$$

$$\text{设 } f(c) = 3c^2 - 3tc + t^2 - 1,$$

由题意可知, $f(c) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

$$\text{而 } f(0) = t^2 - 1 > 0, \text{ 对称轴 } c = -\frac{-3t}{2 \times 3} = \frac{t}{2} > 0,$$

故只需令 $f(c) = 0$ 的判别式 $\Delta \geq 0$ 即可,

$$\text{即 } (-3t)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (t^2 - 1) \geq 0, \text{ 解得 } -2 \leq t \leq 2,$$

综上可得, $b + c = t \in (1, 2]$,

而 $\triangle ABC$ 的周长 $a + b + c \in (2, 3]$.

【标注】 【知识点】 正弦定理

38. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos^2 x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $f(A) = 2, a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $\sqrt{3}$.

【解析】 (1)

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z}),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $\because f(A) = 2$,

$$\therefore 2\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 2, \text{ 即 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3},$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

又 $a = 2$,

$$\therefore 4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc,$$

当且仅当 $b = c = 2$, $(bc)_{\max} = 4$,

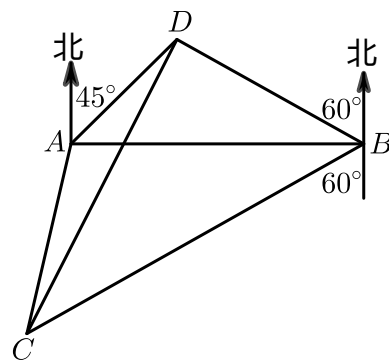
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \sqrt{3},$$

$\therefore$ 当 $b = c = 2$ 时, $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 求面积最值或范围问题; 辅助角公式; 求正弦型函数的单调区间

实际应用

39. A, B 是海面上位于东西方向相距 $5(3 + \sqrt{3})$ 海里的两个观测点, 现位于 A 点北偏东 45° , B 点北偏西 60° 的 D 点有一艘轮船发出求救信号, 位于 B 点南偏西 60° 且 B 点相距 $20\sqrt{3}$ 海里的 C 点的救援船立即前往营救, 其航行速度为 30 海里/小时.

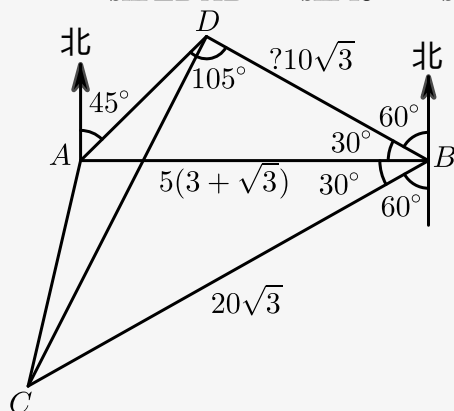


- (1) 求 BD 的距离 .
- (2) 求救援船到达 D 点需要的时间 .

【答案】 (1) $BD = 10\sqrt{3}$.

(2) 1h .

【解析】 (1) $\frac{BD}{\sin \angle DAB} = \frac{BD}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{5(3 + \sqrt{3})}{\sin 105^\circ}$,



$$\therefore BD = 10\sqrt{3} .$$

$$(2) \because CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos \angle DBC ,$$

$$CD^2 = (10\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ ,$$

$$\therefore CD = 30 ,$$

$$\therefore t = \frac{CD}{v} = \frac{30}{30} = 1\text{h} .$$

【标注】 【知识点】 正弦定理；测量距离的问题；余弦定理；正余弦定理综合求解边角