

解三角形综合

一、解三角形综合问题

1. 知识讲解

利用正弦定理，余弦定理解三角形的综合问题时，要注意三角形三个内角的一些三角函数关系：

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，则

$$\textcircled{1} \sin A = \sin(B+C), \cos A = -\cos(B+C),$$

$$\tan A = -\tan(B+C).$$

$$\textcircled{2} \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}, \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin 2A = -\sin(2B+2C), \cos 2A = \cos(2B+2C),$$

$$\tan 2A = -\tan(2B+2C).$$

$$\textcircled{4} \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$\textcircled{5} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C.$$

2. 例题精讲

正余弦定理综合

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边为 a, b, c 。

(1) $a = 4, A = 30^\circ, B = 60^\circ$ ，求 b 。

(2) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1, c = 2$ ，试求 A 。

求面积

2. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$ 。

(1) 求 A 。

(2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2$ 求 $\triangle ABC$ 的面积。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，且 $c \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) - a \sin C = 0$ 。

(1) 求角 A 的值。

(2) 若 $a = 2\sqrt{7}, b = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a \neq b$, $c = \sqrt{3}$, $\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$.
- (1) 求 C .
- (2) 若 $\sin A = \frac{4}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
5. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \cos A(b \cos C + c \cos B) = \sqrt{3}a$.
- (1) 求角 A .
- (2) 若 $a = 1$, $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{5} + 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C + \cos A \cos B = 2 \cos A \sin B$.
- (1) 求 $\tan A$.
- (2) 若 $b = 2\sqrt{5}$, AB 边上的中线 $CD = \sqrt{17}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

求边长

7. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C = b + c$.
- (1) 求 A .
- (2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 b 与 c 的值.
8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \sin A - \sin B - 2 \sin C \cos B = 0$.
- (1) 求内角 C 的大小.
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{3}$, 面积为 $2\sqrt{3}$. 求边 c 的长度.

求周长

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$.
- (1) 求角 C .
- (2) 若 $c = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

与三角函数结合

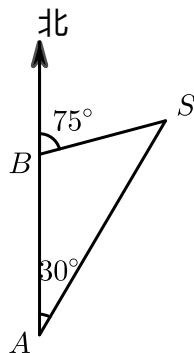
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a > b$, $a = 5$, $\sin B = \frac{3}{5}$, $\triangle ABC$ 的面积为9.
- (1) 求 b 和 $\sin A$ 的值.
- (2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.
11. 已知向量 $\vec{a} = \left(\sin x, \frac{3}{4}\right)$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$.
- (1) 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 求 $\cos^2 x - \sin 2x$ 的值.
- (2) 设函数 $f(x) = 2(a + b) \cdot b$, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, $\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $f(x) + 4 \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ ($x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$) 的取值范围.

 最值问题

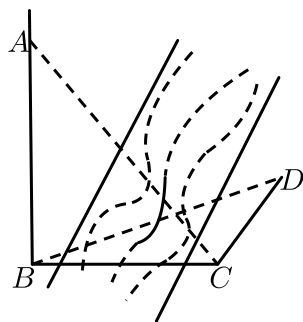
12. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 且 $\sqrt{3}(a \cos B + b \cos A) = 2c \sin B$, $a = 2$. 则边长 b 的取值范围是 ().
- A. $(0, \sqrt{3})$ B. $(0, 2\sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ D. $(\sqrt{3}, +\infty)$
13. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(a-b)(\sin A + \sin B) = (c-b) \sin C$, 若 $a = \sqrt{3}$, 则 $b^2 + c^2$ 的取值范围是 ().
- A. $(5, 6]$ B. $(3, 5)$ C. $(3, 6]$ D. $[5, 6]$
14. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $B = \frac{\pi}{3}$, $b = 1$, 求 $a + c$ 的取值范围 ().
- A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(\sqrt{3}, 2]$ C. $(1, 2]$ D. $(1, 2)$
15. 在 $\triangle ABC$ 中, $2\sqrt{2}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a-b) \sin B$, $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\sqrt{2}$. 则 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 ____.
16. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $c = 2\sqrt{3}$, $\tan A + \tan B = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan A \tan B$, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围是 ().
- A. $[\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, \sqrt{3}]$ C. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}]$ D. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\sin C}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-c}$.
- (1) 求角 B 的大小.
- (2) 点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$, 且线段 $AD = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 向量 $\vec{m} = (a+b, \sin A - \sin C)$, 向量 $\vec{n} = (c, \sin A - \sin B)$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$.
- (1) 求角 B 的大小.
- (2) 设 BC 的中点为 D , 且 $AD = \sqrt{3}$, 求 $a + 2c$ 的最大值.
19. 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, $\cos C + \sqrt{3} \sin C - a - c = 0$, 且 $b = 1$.
- (1) 若 $a + c = 2$, 求 a 与 c .
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.
20. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $f(\frac{A}{2}) = 2$, $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

实际应用

21. 某船开始看见灯塔在南偏东 30° 方向，后来船沿南偏东 60° 的方向航行 $15\sqrt{6}$ 海里后，看见灯塔在正西方向，则这时船与灯塔的距离是（ ）.
- A. 15km B. $15\sqrt{2}\text{km}$ C. $15\sqrt{3}\text{km}$ D. $15\sqrt{6}\text{km}$
22. 如图，一艘船下午 $13:30$ 在 A 处测得灯塔 S 在它的北偏东 30° 处，之后它继续沿正北方向匀速航行， $14:00$ 到达 B 处，此时又测得灯塔 S 在它的北偏东 75° 处，且与它相距 $9\sqrt{2}$ 海里，则此船的航速为（ ）海里/小时.



- A. 18 B. 24 C. 30 D. 36
23. 为测得河对岸塔 AB 的高，先在河岸上选一点 C ，使 C 在塔底 B 的正东方向上，测得点 A 的仰角为 60° ，再由点 C 沿北偏东 15° 方向走10米到位置 D ，测得 $\angle BDC = 45^\circ$ （如图所示），则塔 AB 的高是（ ）.



- A. 10米 B. $10\sqrt{2}$ 米 C. $10\sqrt{3}$ 米 D. $10\sqrt{6}$ 米

3. 课堂巩固

正余弦定理综合

24. 求解下列问题.
- (1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 2$ ， $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $A = 120^\circ$ ，求边 b 和角 C .
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = \frac{4}{5}$ ， $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b = \sqrt{3}$ ，求边 a ， c .

求面积

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b \sin A = a \sin(B + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 若 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a^2 + c^2 = b^2 + ac$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{7}, a = 8$, 求 b 以及 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

27. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin B = \sqrt{2}b$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = 6, b + c = 8$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

28. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 且 $(2b - \sqrt{3}c) \cos A = \sqrt{3}a \cos C$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若角 $B = \frac{\pi}{6}$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

求边长

29. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = \sqrt{3}b \sin A - a \cos B$.

(1) 求角 B 的值.

(2) 若 $b = 2, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 a, c .

30. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sin(A + C) = \frac{8}{17}$, 且角 B 为锐角.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 若 $a + c = 6, \triangle ABC$ 的面积为2, 求边长 b .

求周长

31. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $b \sin 2A = a \sin B$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

与三角函数综合

32. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $B = \frac{\pi}{4}, c = 3\sqrt{2}, \triangle ABC$ 的面积为6.

(1) 求 b 及 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\sin(2A - \frac{\pi}{6})$ 的值.

33. 已知 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin(\frac{\pi}{2} + x) - \cos^2 x$.

(1) 若 $f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{10}$, 求 $\cos(2\alpha + \frac{2\pi}{3})$ 的值.

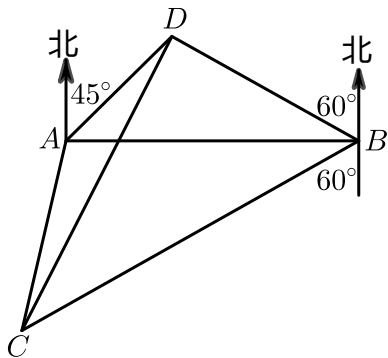
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若有 $(2a-c)\cos B = b\cos C$, 求角 B 的大小以及 $f(A)$ 的取值范围.

🔗 最值问题

34. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对应的边 a, b, c , 且 $2a\sin A = (2b+c)\sin B + (2c+b)\sin C$, 则 $\sin B + \sin C$ 的最大值为().
- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$
35. 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=2, b^2+c^2-bc=4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围是().
- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ B. $(0, \sqrt{3}]$ C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$
36. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $(3b-c)\cos A = a\cos C$.
- (1) 求 $\cos A$.
- (2) 若 $a=\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.
37. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a\cos C + \frac{1}{2}c = b$.
- (1) 求角 A 的大小.
- (2) 若 $a=1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 l 的取值范围.
38. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2\cos^2x + 1$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.
- (2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $f(A)=2, a=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

🔗 实际应用

39. A, B 是海面上位于东西方向相距 $5(3+\sqrt{3})$ 海里的两个观测点, 现位于 A 点北偏东 45° , B 点北偏西 60° 的 D 点有一艘轮船发出求救信号, 位于 B 点南偏西 60° 且 B 点相距 $20\sqrt{3}$ 海里的 C 点的救援船立即前往营救, 其航行速度为30海里/小时.



- (1) 求 BD 的距离 .
- (2) 求救援船到达 D 点需要的时间 .