

正余弦定理及面积公式-习题

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, 则 B 等于().

A. 30°

B. 30° 或 150°

C. 60°

D. 60° 或 120°

【答案】D

【解析】 $\because a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$,

$$\therefore \text{由正弦定理得: } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because b > a$,

$\therefore B = 60^\circ$ 或 120° .

故选D.

【标注】【知识点】正弦定理

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 若 $\sin(A + B) = \frac{1}{3}$, $a = 3$, $c = 4$, 则 $\sin A$ = ().

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】 $\because A + B + C = \pi$,

$$\therefore \sin(A + B) = \sin C = \frac{1}{3},$$

又 $\because a = 3$, $c = 4$,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{即 } \frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{4},$$

故选B.

【标注】【知识点】SSA类三角形(利用正弦定理)

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 3 : 2$, 则最大角的余弦值是 () .
- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 依题意, $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 3 : 2$,

$\therefore$ 根据正弦定理得: $a : b : c = 4 : 3 : 2$,

$\therefore$ 最大角为 A , 设 $a = 4k$, $b = 3k$, $c = 2k (k > 0)$,

根据余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9k^2 + 4k^2 - 16k^2}{2 \cdot 3k \cdot 2k} = -\frac{1}{4}$.

综上所述, 故选B.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, 若 $(a+c)(a-c) = b(b+c)$, 则 $\angle A =$ () .
- A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

【答案】 B

【解析】 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+c)(a-c) = b(b+c)$,

$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A = -bc$

$\cos A = -\frac{1}{2}$,

则 $A = 120^\circ$.

故选B.

【标注】 【知识点】 边角互化 (利用余弦定理)

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}b + 2c = 2a \cos B$, 则 $A =$ () .
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 D

【解析】 $\therefore 2a \cos B = \sqrt{3}b + 2c$, 由正弦定理, 得 $2 \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin B + 2 \sin C$,

而 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

$\therefore 2 \cos A \sin B = -\sqrt{3} \sin B$, 在 $\triangle ABC$, $\sin B \neq 0$, $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 0 < A < \pi$,

$$\therefore A = \frac{5\pi}{6}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 边角互化（利用正弦定理）；利用正弦角公式其他应用

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于().
- A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore c = 4$,

再由余弦定理可得 $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A = 13$,

$$\therefore a = \sqrt{13},$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}, R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径},$$

故选B.

【标注】 【知识点】 三角形外接圆相关问题

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$, 且 $a > b$, 则 $B =$ ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 A

【解析】 $\triangle ABC$ 中, $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$,

由正弦定理得: $\sin A \sin B \cos C + \sin C \sin B \cos A = \frac{1}{2} \sin B$, 且 $\sin B \neq 0$,

$$\therefore \sin A \cos C + \sin C \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin(A+C) = \frac{1}{2};$$

$$\text{又 } A+B+C = \pi,$$

$$\therefore \sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B = \frac{1}{2};$$

$$\text{又 } a > b,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{6}.$$

故选A.

$$\text{由 } a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b,$$

$$\text{得 } (a \cos C + c \cos A) \sin B = \frac{1}{2}b,$$

$$\text{由射影定理 } b = c \cos A + a \cos C,$$

$$\text{可得 } \sin B = \frac{1}{2}, \text{ 注意到 } a > b,$$

$$\text{则 } B = \frac{\pi}{6}, \text{ 故选 A.}$$

【标注】 【知识点】 正弦定理；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦

$$8. \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle B = \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{BC} = (-\sin A, \cos A), \text{ 则角 } A \text{ 的大小是 () .}$$

$$\text{A. } \frac{\pi}{6}$$

$$\text{B. } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{C. } \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{D. } \frac{5\pi}{6}$$

【答案】 A

$$\text{【解析】 } \overrightarrow{AB} = (2, 0),$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2,$$

$$\therefore c = 2,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-\sin A)^2 + \cos^2 A} = 1,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$b^2 = 1 + 4 - 2 \times 2 \left(\frac{1}{2} \right),$$

$$b^2 = 3,$$

$$\therefore b = \sqrt{3},$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin A},$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \because a < b,$$

$$\therefore A < B,$$

$$\therefore A = 30^\circ,$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

9.

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos C}{c}$, 则 C 的值为().

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

【答案】 B

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos C}{c}$, 由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,
 $\therefore \frac{\cos C}{c} = \frac{\sin C}{c}$,

所以 $\sin C = \cos C$, 则 $\sin C = \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 C 为 $\triangle ABC$ 的内角, 则 $0 < C < \pi$, 所以 $C = 45^\circ$.

故选: B.

【标注】 【知识点】 正弦定理

10. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 所对边的长分别为 a 、 b 、 c . 若 $b + c = 2a$, 且 $3\sin A = 5\sin B$, 则角 $C = ()$.

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 B

【解析】 由正弦定理及已知有 $3a = 5b$, 结合 $b + c = 2a$,

$$\therefore a = \frac{5}{3}b, c = \frac{7}{3}b,$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3},$$

故选B.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a^2 - c^2 = 2b$, $\frac{\tan A}{\tan C} = 3$, 则 b 等于()

A. 3

B. 4

C. 6

D. 7

【答案】 B

【解析】 试题分析: $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin C}{\cos C}} = \frac{\sin A \cos C}{\sin C \cos A} = 3$, 即 $\sin A \cos C = 3 \sin C \cos A$, 由正弦定理得 $a \cos C = 3c \cos A$, 由余弦定理得 $a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 3c \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 整理得

$a^2 - c^2 = \frac{1}{2}b^2$, 因为 $a^2 - c^2 = 2b$, 所以 $\frac{1}{2}b^2 = 2b$, 因为 $b \neq 0$, 解得 $b = 4$, 故答案选B.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；正弦定理；余弦定理；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；三角函数的定义；同角三角函数的基本关系式

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c . 若 $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 方法一: $\because \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B$,

结合已知等式得 $\cos B \cdot \tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{则 } \angle B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}.$$

故选D.

方法二: 由 $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$,

$$\text{得 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} \cdot \tan B = \sqrt{3},$$

$$\text{再由余弦定理 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{得 } 2 \cos B \cdot \tan B = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{角 } B \text{ 的值为 } \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

13. $\triangle ABC$ 中, $b = 8$, $c = 8\sqrt{3}$, $S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{3}$, 则 $\angle A = ()$.

A. 30°

B. 60°

C. 30° 或 150°

D. 60° 或 120°

【答案】 C

【解析】 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} \times \sin A = 16\sqrt{3}$,

得 $\sin A = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle A = 30^\circ$ 或 150° .

【标注】【知识点】三角形面积公式

14. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = 2, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. $2\sqrt{3} + 2$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $2\sqrt{3} - 2$ D. $\sqrt{3} - 1$

【答案】 B

【解析】 由正弦定理知 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 结合条件得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2\sqrt{2}$. 又 $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3} + 1$.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}, BC = 1, \sin C = \sqrt{3} \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

【答案】 A

【解析】 由 $\sin C = \sqrt{3} \cos C$ 得 $\tan C = \sqrt{3} > 0$,

所以 $C = \frac{\pi}{3}$,

根据正弦定理可得: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

即 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$,

所以 $\sin A = \frac{1}{2}$,

因为 $AB > BC$,

所以 $A < C$.

所以 $A = \frac{\pi}{6}$,

则 $B = \frac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式; 正弦定理

16.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 2$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 周长为().

A. 4

B. 6

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3} + 2$

【答案】 B

【解析】 $\because \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3},$$

$$\therefore bc = 4.$$

$$\text{由 } A = \frac{\pi}{3}, a = 2, \text{ 及 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 得 } 4 = b^2 + c^2 - 4,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 8. \text{ 又 } bc = 4,$$

$$\therefore b = c = 2. \text{ 故其周长为 } 6.$$

故选 : B .

【标注】 【知识点】三角形面积公式

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\cos A = \frac{4}{5}$, $b = 2$, $S_{\triangle ABC} = 3$, 则边 a 为().

A. $\frac{20}{3}$

B. 5

C. $\sqrt{13}$

D. $\frac{\sqrt{97}}{4}$

【答案】 C

【解析】 $\because \cos A = \frac{4}{5}$,

$$\text{又 } A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A > 0,$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{5},$$

$$S_{\triangle ABC} = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}bc \sin A = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2c \cdot \frac{3}{5} = 3,$$

$$\therefore c = 5,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\therefore a^2 = 4 + 25 - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{4}{5}$$

$$= 29 - 16$$

$$= 13,$$

$$\therefore a = \sqrt{13}.$$

故选C.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理

18. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = \frac{1}{2}$, $b \sin A = a \sin \frac{B}{2}$, 则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{24}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{48}$

【答案】D

【解析】由正弦定理知: $\sin B \sin A = \sin A \sin \frac{B}{2}$,

即 $2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin A = \sin A \sin \frac{B}{2}$,

故 $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$,

$\therefore B = \frac{2\pi}{3}$, 又 $b = \frac{1}{2}$,

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 + ac \geq 3ac$ (当且仅当 $a = c$ 时等号成立),

$\therefore ac \leq \frac{1}{12}$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{48}$.

故选D.

【标注】【知识点】余弦定理；三角形面积公式；正弦定理；正余弦定理综合求解边角

二、填空题

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 3$, 那么 $\frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \frac{\sin A}{\sin(\pi-B)} = \frac{\sin A}{\sin B}$, 由正弦定理得: $\frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】边角互化 (利用正弦定理)

20. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】

$$2; \frac{\sqrt{15}}{8}$$

【解析】根据余弦定理， $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = 4$ ，故 $c = 2$ ，

因为 $\cos C = \frac{1}{4}$ ，于是 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，于是，由正弦定理，

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad (\text{或：由 } a = 1, b = 2, c = 2, \text{ 得}$$

$$\cos A = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8},$$

$$\text{于是, } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.)$$

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理

21. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 6$ ， $b = 7$ ， $\cos C = \frac{5}{7}$ ，则最大内角的余弦值是_____。

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 36 + 49 - 2 \times 6 \times 7 \times \frac{5}{7} = 25$ ，故 $c = 5$ 。

$\therefore$ 最大边为 b ，最大角为 B ， $\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{5}$ 。

【标注】【知识点】SSS类三角形（利用余弦定理）；SAS类三角形（利用余弦定理）

22. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，若 $b = 1$ ， $c = \sqrt{3}$ ， $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____。

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】方法一：由正弦定理：

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2}{3}\pi},$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \angle B < \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \angle B = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \angle A = \pi - \angle B - \angle C = \frac{\pi}{6} = \angle B,$$

$$\therefore a = b = 1.$$

$$\therefore \text{周长} = a + b + c = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{方法二: } \because b = 1, c = \sqrt{3}, \angle C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ 可得: } 3 = a^2 + 1 - 2 \times a \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right), \text{ 解得:}$$

$$a = 1 \text{ 或 } -2 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } a + b + c = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】正弦定理；正余弦定理综合求解边角

$$23. \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 面积 } S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2), \text{ 则角 } C \text{ 的大小为 } \underline{\quad\quad\quad}.$$

【答案】 45°

$$\text{【解析】由三角形的面积公式得: } S = \frac{1}{2}ab \sin C, \text{ 而 } S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2), \text{ 即 } \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C,$$

$$\text{则 } \sin C = \cos C, \text{ 即 } \tan C = 1, \text{ 又 } \angle C \in (0, 180^\circ),$$

$$\text{则 } \angle C = 45^\circ.$$

故答案为: 45° .

【标注】 【知识点】三角形面积公式

$$24. \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 若 } B = \frac{\pi}{6}, \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{3}{2}, \sin A + \sin C = 2 \sin B, \text{ 则 } b \text{ 的值为 } \underline{\quad\quad\quad}.$$

【答案】 $\sqrt{3} + 1$

$$\text{【解析】} \because \sin A + \sin C = 2 \sin B,$$

$$\therefore a + c = 2b,$$

$$\because S = \frac{1}{2}ac \sin B,$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}ac \cdot \frac{1}{2},$$

$$\therefore ac = 6,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,$$

$$b^2 = (a + c)^2 - 2ac \cos B - 2ac,$$

$$b^2 = 4b^2 - 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 12,$$

$$\therefore 3b^2 = 12 + 6\sqrt{3},$$

$$\therefore b^2 = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2,$$

$$\therefore b = \sqrt{3} + 1.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理

25. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边，且满足 $4\cos^2 \frac{A}{2} - \cos 2(B+C) = \frac{7}{2}$ ，若 $a = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 _____。

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because A + B + C = \pi$,

$$\therefore 4\cos^2 \frac{A}{2} - \cos 2(B+C) = 2(1 + \cos A) - \cos 2A$$

$$= -2\cos^2 A + 2\cos A + 3 = \frac{7}{2},$$

$$\therefore 2\cos^2 A - 2\cos A + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}.$$

$$\because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$\because a = 2$ ，由余弦定理可得： $4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$ ，（当且仅当 $b = c = 2$ ，不等式等号成立）。

$$\therefore bc \leq 4.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】求面积最值或范围问题