

# 三角形形状判断与解三角形-习题

## 一、选择题

1.  $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,  $a = \sqrt{5}$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则符合条件的三角形有( ) .

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 0个

**【答案】** B

**【解析】**  $\because \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,

$$\therefore \cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

① 当 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 ,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5 + c^2 - 3}{2\sqrt{5}c} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

整理可得 $c^2 - \sqrt{10}c + 2 = 0$  ,

解得 $c = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$  , 有两个解 .

② 当 $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 ,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5 + c^2 - 3}{2\sqrt{5}c} = -\frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

整理得 $c^2 + \sqrt{10}c + 2 = 0$  ,

解得 $c = \frac{-\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2} < 0$  ,

与 $c > 0$ 矛盾 .

综上所述,  $c = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$  ,

即这样的三角形有2个 .

故选B .

**【标注】** 【知识点】 余弦定理

2. 已知 $\triangle ABC$ 中, 满足 $b = 2$ ,  $B = 60^\circ$ 的三角形有两解, 则边长 $a$ 的取值范围是( ) .

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 2$

B.  $\frac{1}{2} < a < 2$

C.  $2 < a < \frac{4\sqrt{3}}{3}$

D.  $2 < a < 2\sqrt{3}$

**【答案】** C

【解析】由三角形有两解，则满足  $\begin{cases} a \sin B < b \\ a > b \end{cases}$ ，  
 $\therefore \begin{cases} a \sin 60^\circ < 2 \\ a > 2 \end{cases}$ ，解得： $2 < a < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，  
 边长  $a$  的取值范围  $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 。

故选C。

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】三角形解的个数判断

3. 在  $\triangle ABC$  中， $B = \frac{\pi}{4}$ ， $BC$  边上的高等于  $\frac{1}{3}BC$ ，则  $\cos \angle BAC = ( \quad )$ 。

A.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

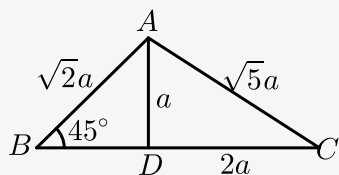
B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

D.  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】C

【解析】方法一：如图，



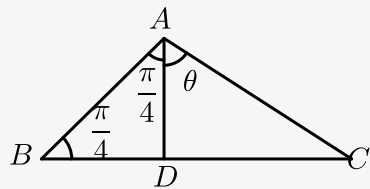
设  $AD = a$ ，则  $BC = 3AD = 3a$ ， $AB = \sqrt{2}a$ ， $AC = \sqrt{5}a$ 。

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{(\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{5}a)^2 - (3a)^2}{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选C。

方法二：如图，设  $\triangle ABC$  中角  $A, B, C$  对应的边分别为  $a, b, c$ ，

$AD \perp BC$  于  $D$ ，令  $\angle DAC = \theta$ ，



$\therefore$  在  $\triangle ABC$  中， $B = \frac{\pi}{4}$ ， $BC$  边上的高  $AD = h = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$ ，

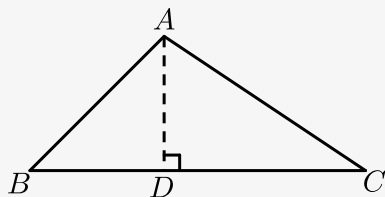
$\therefore BD = AD = \frac{1}{3}a$ ， $CD = \frac{2}{3}a$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中，} \cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

$$\therefore \cos \angle BAC = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 故选 C.}$$

方法三：如图，



过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，

由题意知 $AD = BD = \frac{1}{3}BC$ ，

则 $CD = \frac{2}{3}BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AC = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$ ， $\sin \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

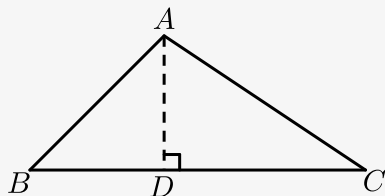
因为 $B = \frac{\pi}{4}$ ，

所以

$$\cos \angle BAC = \cos \left( \angle DAC + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \angle DAC \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \angle DAC \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

故选C．

方法四：如图，过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，



由题意知 $AD = BD = \frac{1}{3}BC$ ，则 $CD = \frac{2}{3}BC$ ， $AB = \frac{\sqrt{2}}{3}BC$ ， $AC = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$ ，而

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AD} + \vec{DB}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{AD}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{DC} + \vec{AD} \cdot \vec{DB} + \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \frac{1}{9}BC^2 - \frac{2}{9}BC^2 = -\frac{1}{9}BC^2$$

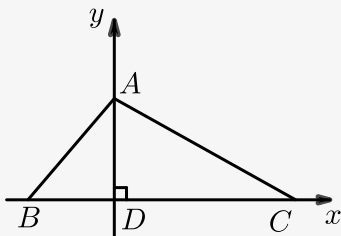
$$\text{, 所以 } \cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-\frac{1}{9}BC^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}BC} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选C．

方法五：如图，过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，

设 $BC = 3a(a > 0)$ ，结合题意知 $AD = BD = a$ ， $DC = 2a$ ．

以D为坐标原点，DC，DA所在直线分别为x轴，y轴建立如图所示的平面直角坐标系，



则  $B(-a, 0)$ ,  $C(2a, 0)$ ,  $A(0, a)$ , 所以  $\overrightarrow{AB} = (-a, -a)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2a, -a)$ , 所以  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}a$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}a$ ,  
 所以  $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2a^2 + a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

故选C.

**【标注】** 【知识点】SSS类三角形（利用余弦定理）；多个三角形拼接的解三角形问题

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 且 $a + b = c(\cos A + \cos B)$ , 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ( ) .

A. 等腰三角形      B. 直角三角形      C. 锐角三角形      D. 钝角三角形

**【答案】** B

**【解析】**  $a + b = c(\cos A + \cos B)$ .

$$a + b = c \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right).$$

$$2ab(a + b) = ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2b + bc^2 - b^3.$$

$$a^3 + b^3 + ab^2 + a^2b = ac^2 + bc^2 = c^2(a + b).$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab + ab = c^2.$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$\therefore$  是Rt $\triangle$ .

$\therefore$  选B.

**【标注】** 【知识点】利用余弦定理判断三角形形状

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 若 $a \cdot \cos A = b \cos B$ , 则 $\triangle ABC$ 的形状为( )

A. 等腰三角形      B. 直角三角形  
 C. 等腰三角形或直角三角形      D. 等腰直角三角形

**【答案】** C

**【解析】** 在 $\triangle ABC$ 中,  $\therefore a \cdot \cos A = b \cos B$ ,

$\therefore$  由正弦定理得:  $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ,

即  $\sin 2A = \sin 2B$ ,

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A = \pi - 2B,$$

$$\therefore A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2},$$

∴  $\triangle ABC$  的形状为等腰三角形或直角三角形.

故选: C.

**【标注】** 【知识点】正余弦定理综合判断三角形形状; 正弦定理

6. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{c}$ ,  $(b+c+a)(b+c-a) = 3bc$ , 则  $\triangle ABC$  的形状为 ( ).
- A. 等边三角形      B. 等腰非等边三角形      C. 直角三角形      D. 钝角三角形

**【答案】** A

**【解析】** ∵  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{c}$ ,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a}{c},$$

$$\therefore b = c.$$

$$\text{又} \because (b+c+a)(b+c-a) = 3bc,$$

$$\therefore (b+c)^2 - a^2 = 3bc,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

$$\text{又} \because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

$$\text{又} \because b = c,$$

∴ 为等边三角形.

**【标注】** 【知识点】正弦定理; 正余弦定理综合判断三角形形状; 余弦定理

7. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $b^2 + c^2 = a^2 + bc$ , 若  $\sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$ , 则  $\triangle ABC$  的形状是 ( ).
- A. 等腰三角形      B. 直角三角形      C. 等边三角形      D. 等腰直角三角形

**【答案】** C

**【解析】** 由  $b^2 + c^2 = a^2 + bc$ ,

$$\text{得} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$A = 60^\circ,$$

$$\text{由} \begin{cases} \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \end{cases},$$

$$\text{得} bc = a^2, a^2 - bc = 0,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc = a^2 - bc,$$

$$(b - c)^2 = 0, b = c,$$

又  $A = 60^\circ$ ,  $\therefore \triangle ABC$  为等边三角形, 故选 C.

**【标注】** 【知识点】余弦定理; 正弦定理

8. 若  $\triangle ABC$  中,  $\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  的形状为 ( ).

A. 直角三角形

B. 等边三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰直角三角形

**【答案】** C

**【解析】** 由  $\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$  可得

$$2 \sin B \cdot \sin C = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A,$$

$$\text{即 } 2 \sin B \cdot \sin C = 1 - \cos(B + C) = 1 - \cos B \cos C + \sin B \sin C,$$

$$\therefore \sin B \cdot \sin C + \cos B \cos C = 1, \text{ 即 } \cos(B - C) = 1,$$

$$\text{又 } -\pi < \angle B - \angle C < \pi, \therefore \angle B - \angle C = 0, \text{ 即 } \angle B = \angle C.$$

$\therefore \triangle ABC$  为等腰三角形.

**【标注】** 【知识点】利用三角恒等变换判断三角形形状

9.  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为角  $A, B, C$  所对的边, 若  $\frac{c}{b} < \cos A$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( ).

A. 锐角三角形

B. 钝角三角形

C. 直角三角形

D. 等边三角形

**【答案】** B

**【解析】**  $\because \frac{c}{b} < \cos A,$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin B} < \cos A,$$

$$\because B \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin B > 0,$$

$$\therefore \sin C < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin(A + B) < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin A \cos B + \sin B \cos A < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin A \cos B < 0,$$

$$\therefore A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A > 0,$$

$$\therefore \cos B < 0,$$

$$\therefore B \text{ 为钝角},$$

$$\therefore \text{为钝角三角形},$$

故选：B.

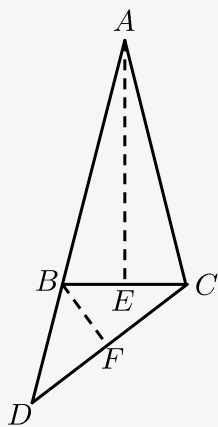
**【标注】** 【知识点】正弦定理；正余弦定理综合判断三角形形状

## 二、填空题

10. 已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC = 4$ ， $BC = 2$ ．点 $D$ 为 $AB$ 延长线上一点， $BD = 2$ ，连接 $CD$ ，则 $\triangle BDC$ 的面积是 \_\_\_\_\_， $\cos \angle BDC =$  \_\_\_\_\_．

**【答案】**  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ； $\frac{\sqrt{10}}{4}$

**【解析】** 方法一：取 $BC$ 中点 $E$ ， $DC$ 中点 $F$ ，



由题意得 $AE \perp BC$ ， $BF \perp CD$ ，

$$\triangle ABE \text{ 中, } \cos \angle ABE = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{4}, \therefore \cos \angle DBC = -\frac{1}{4}, \sin \angle DBC = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BD \times BC \times \sin \angle DBC = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{又} \because \cos \angle DBC = 1 - 2\sin^2 \angle DBF = -\frac{1}{4}, \therefore \sin \angle DBF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore \cos \angle BDC = \sin \angle DBF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{综上可得, } \triangle BCD \text{ 面积为 } \frac{\sqrt{15}}{2}, \cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

方法二： $\because AB = AC = 4$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1}{4},$$

$\therefore \angle ABC$  为三角形的内角 .

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4} ,$$

$$\therefore \sin \angle CBD = \frac{\sqrt{15}}{4} ,$$

$$\text{故 } S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} ,$$

$$\therefore BD = BC = 2 ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle BDC .$$

$$\text{又 } \cos \angle ABC = \frac{1}{4} ,$$

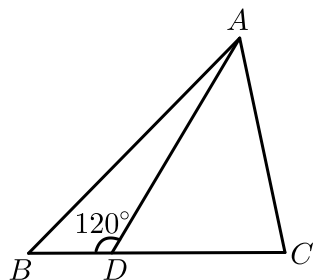
$$\therefore 2\cos^2 \angle BDC - 1 = \frac{1}{4} \text{ 得 } \cos^2 \angle BDC = \frac{5}{8} ,$$

又  $\angle BDC$  为锐角 ,

$$\therefore \cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4} .$$

**【标注】** 【知识点】 三角形面积公式

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  上一点,  $BD = \frac{1}{2}DC$ ,  $\angle ADB = 120^\circ$ ,  $AD = 2$ , 若  $\triangle ADC$  的面积为  $3 - \sqrt{3}$ , 则  $\angle BAC =$  \_\_\_\_\_ .



**【答案】**  $60^\circ$

$$\text{【解析】 } \because S_{\triangle ADC} = 3 - \sqrt{3} , \therefore \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin 60^\circ = 3 - \sqrt{3} ,$$

$$\therefore DC = 2(\sqrt{3} - 1) , BD = \sqrt{3} - 1 ,$$

$$\text{由余弦定理: } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot DB \cos 120^\circ = 6 ,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cos 60^\circ = 24 - 12\sqrt{3} = 6(\sqrt{3} - 1)^2 .$$

$$\therefore AB = \sqrt{6} , AC = \sqrt{6}(\sqrt{3} - 1) .$$

$$\text{再由余弦定理, } \cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2} , \therefore \angle BAC = 60^\circ .$$

**【标注】** 【知识点】 余弦定理; 正余弦定理综合求解边角; 三角形面积公式