

平面向量综合-习题

一、基底法

1. 设四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $|\vec{AB}| = 6$, $|\vec{AD}| = 4$, 若点 M, N 满足 $\vec{BM} = 3\vec{MC}$, $\vec{DN} = 2\vec{NC}$, 则 $\vec{AM} \cdot \vec{NM} = ()$.

A. 20

B. 15

C. 9

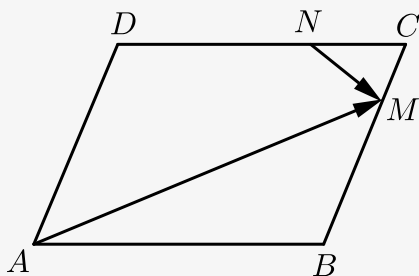
D. 6

【答案】C

【解析】方法一: $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$, $\vec{NM} = \vec{CM} - \vec{CN} = -\frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB}$,
所以 $\vec{AM} \cdot \vec{NM} = \frac{1}{4}(4\vec{AB} + 3\vec{AD}) \cdot \frac{1}{12}(4\vec{AB} - 3\vec{AD})$
 $= \frac{1}{48}(16\vec{AB}^2 - 9\vec{AD}^2) = \frac{1}{48}(16 \times 36 - 9 \times 16) = 9$.

故选C.

方法二: 由图及题意易得:

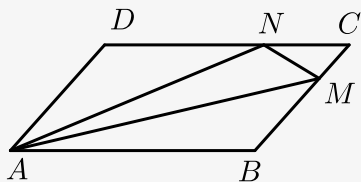


N 为 DC 的三等分点, M 为 BC 的四等分点.

$$\begin{aligned}\therefore \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}, \vec{NM} = \vec{NC} + \vec{CM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{BC}. \\ \therefore \vec{AM} \cdot \vec{NM} &= \left(\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{BC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB}^2 - \frac{3}{16}\vec{BC}^2 \\ &= 9.\end{aligned}$$

故选C.

方法三: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 点 M, N 满足 $\vec{BM} = 3\vec{MC}$, $\vec{DN} = 2\vec{NC}$,



$\therefore$ 根据图形可得: $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$,

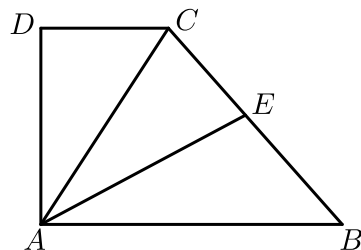
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \\
\therefore \overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}, \\
\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}, \\
\overrightarrow{AM}^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2, \\
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \\
|\overrightarrow{AB}| &= 6, |\overrightarrow{AD}| = 4, \\
\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2 = 12 - 3 = 9.
\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；用基底法求向量的数量积

【素养】数学运算

2. 如图在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle D$ 为直角, $AB = 3$, $AD = \sqrt{2}$, E 为 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 -3

【解析】 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 3 \text{①},$
 又 $\because AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ,$
 $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{②},$
 将②代入①得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 3,$
 即 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos 0 = 3,$
 $\therefore |\overrightarrow{DC}| = 1,$
 则 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3},$
 $\because E$ 是 BC 中点,
 $\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$
 且 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$

$$\begin{aligned}
 \therefore \vec{AE} \cdot \vec{BC} &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) (\vec{AC} - \vec{AB}) \\
 &= \frac{1}{2} (\vec{AC}^2 - \vec{AB}^2) \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 9) \\
 &= -3.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

3. 已知菱形 $ABCD$ 边长为2, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, 点 P 满足 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 若 $\vec{BD} \cdot \vec{CP} = -3$, 则 λ 的值为 () .
- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

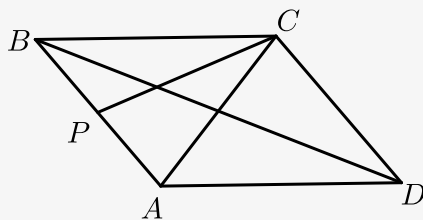
【答案】 A

【解析】 方法一：由题意可得 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$,

$$\begin{aligned}
 &\vec{BD} \cdot \vec{CP} \\
 &= (\vec{BA} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BP} - \vec{BC}) \\
 &= (\vec{BA} + \vec{BC}) \cdot [(\vec{AP} - \vec{AB}) - \vec{BC}] \\
 &= (\vec{BA} + \vec{BC}) \cdot [(\lambda - 1) \cdot \vec{AB} - \vec{BC}] \\
 &= (1 - \lambda) \vec{BA}^2 - \vec{BA} \cdot \vec{BC} + (1 - \lambda) \vec{BA} \cdot \vec{BC} - \vec{BC}^2 \\
 &= (1 - \lambda) \cdot 4 - 2 + 2(1 - \lambda) - 4 = -6\lambda = -3, \\
 \therefore \lambda &= \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

故选：A .

方法二：



$$\begin{aligned}
 \vec{BD} \cdot \vec{CP} &= (\vec{AD} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AP} - \vec{AC}) = (\vec{AD} - \vec{AB}) \cdot (\lambda \vec{AB} - \vec{AB} - \vec{AD}) = \lambda (\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB}^2) = \lambda \left(2^2 \cos \frac{2\pi}{3} - 2^2 \right) = -6\lambda = -3 \\
 , \text{解得} \lambda &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

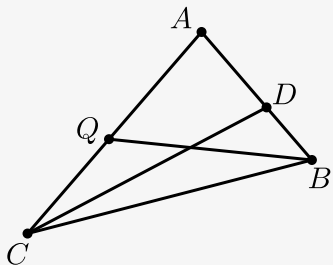
故选A .

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2$. 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. 若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -2$, 则 $\lambda = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2

【答案】 B

【解析】



如图, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$,

则 $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$,

又 $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = -\vec{b} + (1 - \lambda) \vec{c}$,

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{c} + (1 - \lambda) \vec{b}$,

由 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -2$ 得

$$[-\vec{b} + (1 - \lambda) \vec{c}] \cdot (-\vec{c} + \lambda \vec{b}) = (\lambda - 1) |\vec{c}|^2 - \lambda |\vec{b}|^2 = 4(\lambda - 1) - \lambda = -2,$$

$$\text{即 } 3\lambda = 2, \lambda = \frac{2}{3}.$$

【标注】 【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律；共线向量

5. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC$, $DF = \mu DC$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{7}{12}$

【答案】 C

【解析】 方法一：因为 $\angle BAD = 120^\circ$, 所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 120^\circ = -2.$$

因为 $BE = \lambda BC$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

因为 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$,

$$\text{所以 } (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}) \cdot (\mu \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 1,$$

$$\text{即 } 2\lambda + 2\mu - \lambda\mu = \frac{3}{2} \quad ①$$

$$\text{同理可得 } \lambda\mu - \lambda - \mu = -\frac{2}{3} \quad ②, \quad ①+② \text{ 得 } \lambda + \mu = \frac{5}{6}.$$

方法二：由题意可得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF}$$

$$= 2 \times 2 \times \cos 120^\circ + \overrightarrow{AB} \cdot \mu \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{AD} \cdot \mu \overrightarrow{AB}$$

$$= -2 + 4\mu + 4\lambda + \lambda\mu \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ$$

$$= 4\lambda + 4\mu - 2\lambda\mu - 2 = 1,$$

$$\therefore 4\lambda + 4\mu - 2\lambda\mu = 3 \quad ①.$$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{EC} \cdot (-\overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FC}$$

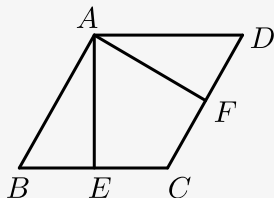
$$= (1-\lambda)\overrightarrow{BC} \cdot (1-\mu)\overrightarrow{DC} = (1-\lambda)\overrightarrow{AD} \cdot (1-\mu)\overrightarrow{AB}$$

$$= (1-\lambda)(1-\mu) \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)(-2)$$

$$= -\frac{2}{3},$$

$$\text{即 } -\lambda - \mu + \lambda\mu = -\frac{2}{3} \quad ②,$$

$$\text{由 } ①② \text{ 求得 } \lambda + \mu = \frac{5}{6},$$



故选C.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

6. 在梯形ABCD中， $AB \parallel CD$ ， $AB = BC = 2$ ， $CD = 1$ ，M是线段BC上的动点，若 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$ ，则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 _____.

【答案】 [1, 4)

【解析】 由题目知，

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 2, \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

M是线段BC上的动点，

$$\text{设 } \overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC}, \text{ 其中 } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

由向量加减法运算可得：

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{BC},$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} &= \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \right) \cdot \left(\lambda \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \right) \\
&= \lambda |\overrightarrow{BC}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}|^2 + \left(\frac{1}{2} \lambda - 1 \right) \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3, \\
\text{即 } 4\lambda - 2 + \left(\frac{1}{2} \lambda - 1 \right) \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= -3, \\
\text{所以 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{2+8\lambda}{2-\lambda} = \frac{18}{2-\lambda} - 8, \\
\text{因为 } 0 \leq \lambda \leq 1, \\
\text{所以 } 1 \leq \frac{18}{2-\lambda} - 8 \leq 10, \\
\text{即 } 1 \leq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \leq 10, \\
\text{又因为 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \theta, \\
\text{其中 } \theta &\text{ 为 } \overrightarrow{BA} \text{ 与 } \overrightarrow{BC} \text{ 夹角, } \theta \in (0, \pi), \\
\text{因为 } \cos \theta &\in (-1, 1), \\
\text{所以 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= 2 \times 2 \cos \theta = 4 \cos \theta \in (-4, 4), \\
\text{又 } 1 \leq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \leq 10, \\
\text{所以 } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &\in [1, 4].
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

7. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E 、 F 分别在边 BC , CD 上, $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 _____.

【答案】 3

【解析】 $\because \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 且 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}
\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \\
&= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{DC}) \\
&= (1 + \lambda\mu) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda |\overrightarrow{AD}|^2 + \mu |\overrightarrow{AB}|^2 \\
&= (1 + \lambda\mu) \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + 4(\lambda + \mu) \\
&= 4(\lambda + \mu) - 2(1 + \lambda\mu).
\end{aligned}$$

由题意知, $\lambda, \mu > 0$.

$$\because 2\lambda + \mu = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \text{原式} = 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

$\therefore$ 最小值为 $\lambda = 1$ 时, .

$$\therefore 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 3.$$

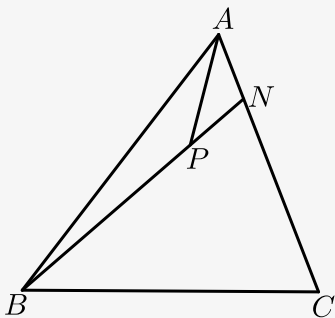
【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

二、利用三点共线

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$, 则实数 m 的值为().
- A. $\frac{3}{11}$ B. $\frac{9}{11}$ C. $\frac{21}{22}$ D. $\frac{31}{33}$

【答案】A

【解析】 $\because \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AN}$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11} \times 4\overrightarrow{AN}$
 $= m\overrightarrow{AB} + \frac{8}{11}\overrightarrow{AN}$,
 $\because P, B, N$ 三点共线,
 $\therefore m + \frac{8}{11} = 1$,
 $\therefore m = \frac{3}{11}$.

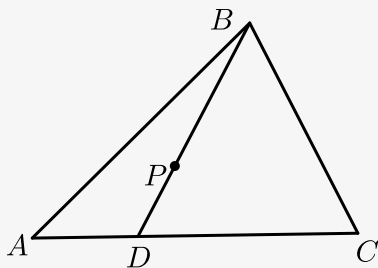


【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题；平面向量的加法运算及运算规则

9. $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 上的一点, 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. 若 P 为 BD 上的一点, 满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m > 0$, $n > 0$), 则 mn 的最大值为 ____.

【答案】 $\frac{1}{16}$

【解析】



$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AB} + 4n \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore B, P, D \text{ 共线},$$

$$\therefore m + 4n = 1,$$

$$\therefore m + 4n \geq 2\sqrt{4mn},$$

$$\therefore 1 \geq 4\sqrt{mn},$$

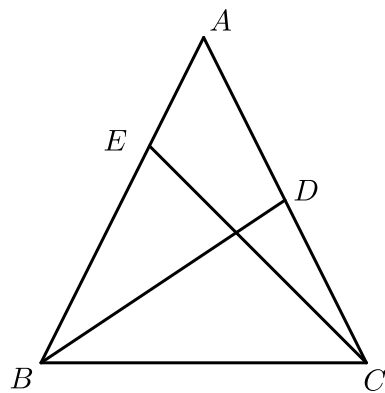
$$\therefore mn \leq \frac{1}{16}.$$

当且仅当 $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{8}$ 时取得最大值.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量中的三点共线问题；基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

三、坐标法

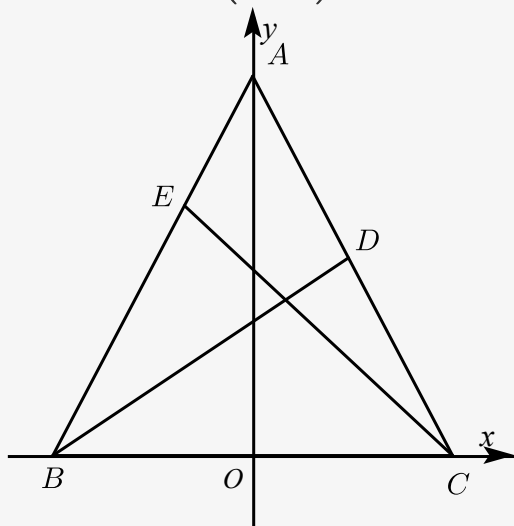
10. 如图，在等腰三角形 ABC 中，底边 $BC = 2$ ， $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EB}$ ，若 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ ，则 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $-\frac{4}{3}$

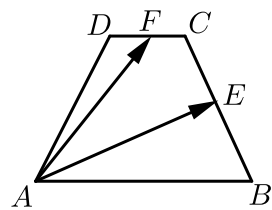
【解析】可取 BC 中点为 O ，以 $\overrightarrow{OC}$ 方向为 x 轴正向， $\overrightarrow{OA}$ 方向为 y

轴正向，故得 $B(-1,0)$ ， $C(1,0)$ ，设 A 点坐标为 $(0,m)$ ，故 $D\left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2}\right)$ ， $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{2m}{3}\right)$ ，由题意得 $\overrightarrow{BD} = \left(\frac{3}{2}, \frac{m}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{AC} = (1, -m)$ ，由 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow m = 2$ ，即 $E = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ，代入计算即可。



【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

11. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上，且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为_____。



【答案】 $\frac{29}{18}$

【解析】方法一：如图，以 A 为坐标原点， $\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，

过点 D 作 $DG \perp AB$ 交 AB 于点 G ，过点 C 作 $CH \perp AB$ 交 AB 于点 H ，

由题得，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ，

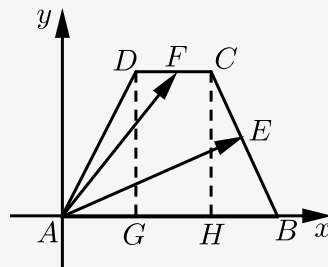
$AD = BC = 1$ ， $\angle DAB = \angle ABC = 60^\circ$ ，

所以 $AG = AD \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，

$BH = BC \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，

同理， $DG = CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $B(2,0)$ ， $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，



$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{BC} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \text{又因为 } \overrightarrow{BE} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}, \\ \text{所以 } F &\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), E\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ \text{所以 } \overrightarrow{AF} &= \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{AE} = \left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ \text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{29}{18}. \\ \text{故本题正确答案为 } &\frac{29}{18}. \end{aligned}$$

方法二：由平面几何知识知，

$$DC = 1,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} \\ &= 1 \times 2 \times \cos 60^\circ + 1 \times \frac{2}{3} \times \cos 60^\circ + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \cos 120^\circ \\ &= \frac{29}{18}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

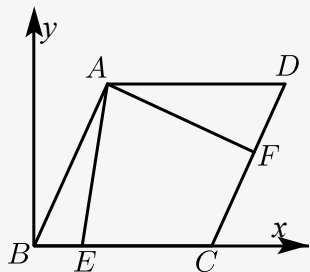
12. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2， $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E, F 分别在边 BC, DC 上，

$BC = 3BE, DC = \lambda DF$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$ ，则 λ 的值为 _____ .

【答案】 2

【解析】 方法一：建立如图所示的直角坐标系，则

$$B(0,0), C(2,0), A(1,\sqrt{3}), D(3,\sqrt{3}), E\left(\frac{2}{3},0\right), F\left(3-\frac{1}{\lambda}, \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\right),$$



$$\because \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1, \therefore \lambda = 2$$

$$\begin{aligned} \text{方法二：} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}, \\ \text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ + \frac{4}{\lambda} + \frac{4}{3} = 1, \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 2$.

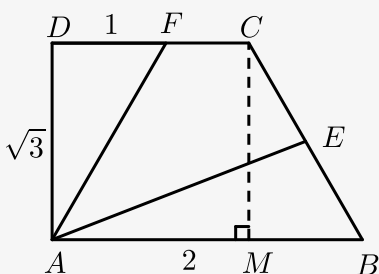
【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

13. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AD = \sqrt{3}$ ， $DC = 1$ ，动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{11}{6}$

【解析】 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6\lambda} \overrightarrow{DC}$.

过 C 作 $CM \perp AB$ 交 AB 于 M ，



$$\therefore MB = 1, CM = \sqrt{3},$$

$$\therefore CB = 2,$$

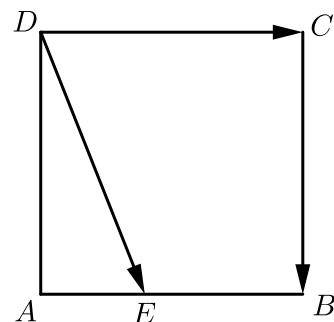
$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC} \right) \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6\lambda} \overrightarrow{DC} \right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6\lambda} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= 0 + \frac{1}{6\lambda} \times 2 \times 1 + \lambda \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3\lambda} + 3\lambda - \frac{1}{6} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{3\lambda} \cdot 3\lambda} - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

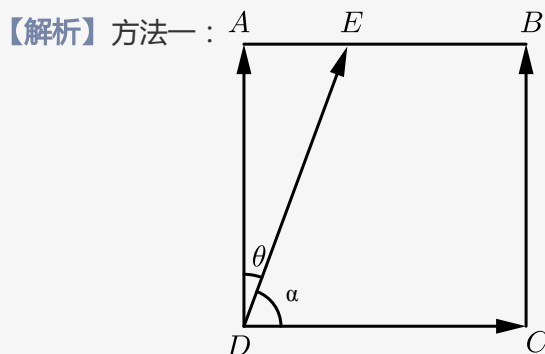
【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

四、投影法

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为 _____； $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 _____ .



【答案】 1 ; 1



根据平面向量的点乘公式 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA} = |\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DA}| \cos \theta$, 可知 $|\overrightarrow{DE}| \cos \theta = |\overrightarrow{DA}|$,

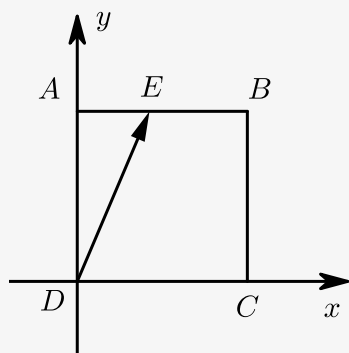
因此 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{DA}|^2 = 1$; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cos \alpha = |\overrightarrow{DE}| \cdot \cos \alpha$,

而 $|\overrightarrow{DE}| \cos \alpha$ 就是向量 $\overrightarrow{DE}$ 在 $\overrightarrow{DC}$ 边上的射影 ,

要想让 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 最大 , 即让射影最大 , 此时 E 点与 B 点重合 , 射影为 $|\overrightarrow{DC}|$,

所以长度为 1 .

方法二：以 DC , DA 所在直线为 x 轴 , y 轴建立直角坐标系 ,



则 $D(0,0)$, $C(1,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$,

设 $E(x,1)$, 其中 $0 \leq x \leq 1$,

$\therefore \overrightarrow{DE} = (x,1)$, $\overrightarrow{CB} = (0,1)$, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = 1$;

又 $\overrightarrow{DC} = (1,0)$, $\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = x \in [0,1]$,

故 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 1 .

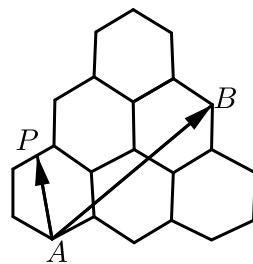
方法三：

$\vec{DE} \cdot \vec{CB} = |\vec{DE}| |\vec{CB}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle = |\vec{DE}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle$ ，由数量积的几何意义知，
 $|\vec{DE}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle$ 表示 $\vec{DE}$ 在 $\vec{CB}$ 方向上的投影，长度即为1，故 $\vec{DE} \cdot \vec{CB} = 1$ ；
 $\vec{DE} \cdot \vec{DC} = |\vec{DE}| |\vec{DC}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle = |\vec{DE}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle$ ，由数量积的几何意义知，
 $|\vec{DE}| \cos \langle \vec{DE}, \vec{CB} \rangle$ 表示 $\vec{DE}$ 在 $\vec{DC}$ 方向上的投影，投影的最大值为1，故 $\vec{DE} \cdot \vec{DC}$ 的最大值为1

故答案为：1；1.

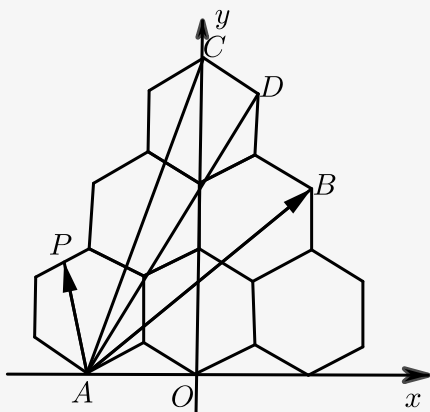
【标注】【知识点】利用投影解决平面向量的数量积

15. 右图是由六个边长为1的正六边形组成的蜂巢图形，定点A, B是如图所示的两个顶点，动点P在这些正六边形的边上运动，则 $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$ 的最大值为 _____.



【答案】 $\frac{45}{2}$

【解析】 根据题意，可建立如图所示坐标系，由正六边形边长为1可得，



$$A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 3), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

由 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AP}| \cdot \cos \theta$ ，其中 θ 是 $\vec{AP}$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角.

若 $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$ 最大，则只需向量 $\vec{AP}$ 在向量 $\vec{AB}$ 上的投影最大，即 $|\vec{AP}| \cdot \cos \theta$ 最大即可.

通过图形可知，当点P与点D重合时， $|\vec{AP}| \cdot \cos \theta$ 最大，

$$\text{则 } \vec{AB} = (2\sqrt{3}, 3), \vec{AD} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}, \\ \therefore \vec{AP} \cdot \vec{AB} \text{ 最大值为 } &\frac{45}{2}.\end{aligned}$$

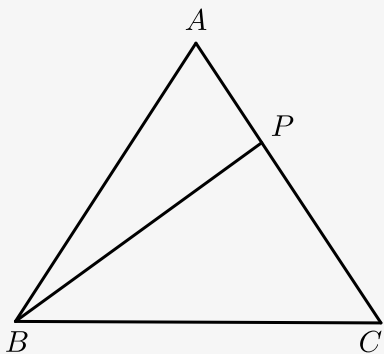
【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；向量的投影；利用投影解决平面向量的数量积

五、向量与三角形四心问题

16. 在 $\triangle ABC$ 所在平面上有一点 P ，满足 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AB}$ ，则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比值是（ ）。
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】 A

【解析】



$$\begin{aligned}\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} &= \vec{AB}, \\ \therefore \vec{PA} + \vec{PC} &= \vec{AB} - \vec{PB} = \vec{AP}, \\ \therefore \vec{PC} &= 2\vec{AP}, \\ \therefore P &\text{ 为 } AC \text{ 的三等分点}, \\ \therefore \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

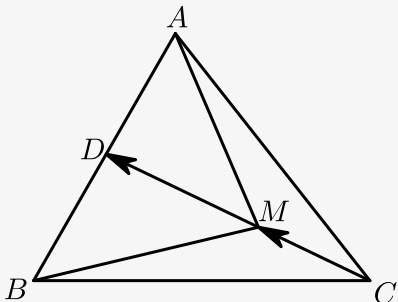
故选A.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

17. 若点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，且满足 $5\vec{AM} = \vec{AB} + 3\vec{AC}$ ，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为（ ）。
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】设 AB 的中点为 D ，由 $5\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ ，得 $3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM}$ ，即 $3\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MD}$ ，
如图所示，故 C, M, D 三点共线，且 $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ ，
也就是 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 对于边 AB 的两高之比为 $\frac{3}{5}$ ，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $\frac{3}{5}$ 。



【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

18. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 2$ ， $AC = 4$ ， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = ()$.
A. $\frac{67}{18}$ B. $-\frac{67}{18}$ C. $\frac{26}{9}$ D. $-\frac{26}{9}$

【答案】A

【解析】 $\because AB = 3$ ， $BC = 2$ ， $AC = 4$ ，

由余弦定理可得， $\cos A = \frac{9 + 16 - 4}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2},$$

$$\because G \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心, 则 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$
$$= \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{9}(-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{21}{2} + 9 - 32\right) = -\frac{67}{18},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{67}{18}.$$

故选A.

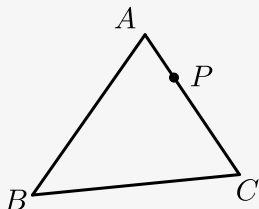
【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律；平面向量与三角形的“心”

19. 平面上点 P 与不共线三点 A, B, C 满足关系式： $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ ，则下列结论正确的是() .
A. P 在 CA 上，且 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA}$
B. P 在 AB 上，且 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$
C. P 在 BC 上，且 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC}$

D. P 点为 $\triangle$ 的重心

【答案】A

【解析】 $\because \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AB}$,



$$\therefore \vec{PA} + \vec{PC} = \vec{AB} - \vec{PB} = \vec{AP},$$

$$\therefore \vec{PC} = 2\vec{AP},$$

$\therefore$ 故 P 在线段 AC 上. 故选A.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；共线向量

20. 已知 ABC 是平面上不共线的三点， O 是三角形 ABC 的重心，动点 P 满足

$$\vec{OP} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} + 2\vec{OC} \right),$$
 则点 P 一定为三角形 ABC 的 ()

A. AB 边中线的中点

B. AB 边中线的三等分点 (非重心)

C. 重心

D. AB 边的中点

【答案】B

【解析】由选项知，本题应该选择 C 为起点，

$$\text{于是得：} 6\vec{CP} - 6\vec{CO} = \vec{CA} - \vec{CO} + \vec{CB} - \vec{CO} - 4\vec{CO},$$

$$\text{从而} 6\vec{CP} = \vec{CA} + \vec{CB}, \text{ 即 } \vec{CP} = \frac{1}{6}(\vec{CA} + \vec{CB}),$$

$$\text{取} AB \text{ 边的中点 } M, \text{ 则 } \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CM}, \text{ 从而 } \vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{CM},$$

即点 P 为三角形中 AB 边上的中线的一个三等分点，且点 P 不是重心.

点评：由 $\vec{CP} = \frac{1}{6}(\vec{CA} + \vec{CB})$ ， $\frac{1}{6} : \frac{1}{6} = 1$ 知点 P 在 BC 边的中线上；由 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ 知，是中线上靠近 C 的一个三等分点，且不是重心，

故选：B.

【标注】【知识点】平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则