

平面向量的概念与线性运算

一、平面向量的基本概念

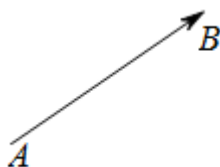
1. 知识讲解

1.向量的概念：我们把具有大小和方向的量称为向量．

2.向量的表示：

①几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度．

②字母表示法： $\overrightarrow{AB}$ ，注意起点在前，终点在后．



3.相等和相反向量：

①同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量,记作 $\vec{a} = \vec{b}$ ．

②与向量 $\vec{a}$ 方向相反且等长的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$ ．

4.共线或平行向量：通过有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的直线，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的基线．如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行．向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ．

5.零向量：长度等于零的向量，叫做零向量．记作： $\vec{0}$ ．

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行．

6.单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量．

7.向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ ．

2. 例题精讲

1. 下列给出的命题正确的是（ ）．

- A. 两个向量的模相等，则这两个向量的长度相等且方向相同或相反
- B. 两个共线的向量，其方向一定相同
- C. 若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量
- D. 两个有共同起点的共线向量，其终点一定相同

【答案】C

【解析】A 选项：两个向量模相等，则这两个向量长度相等，且两向量可以呈任意角度，故A错误；

B 选项：两个共线向量，其方向相同或相反，故B错误；

C 选项：若两个向量不共线，则这两个向量都是非零向量，故C正确；

D 选项：两个有共同起点的共线向量，其终点不一定相同，因为两个向量模不一定相同，故D错误；

故选 C.

【标注】【知识点】共线向量；零向量；平面向量概念辨析问题；相等向量与相反向量

2. 在下列命题中：①平行向量一定相等；②不相等的向量一定不平行；③共线向量一定相等；④相等向量一定共线；⑤长度相等的向量是相等向量；⑥平行于同一个非零向量的两个向量是共线向量．正确的命题是 _____ .

【答案】④⑥

【解析】由两个向量相等，必须满足方向相同和大小相等，所以①⑤错误，④正确；

由向量不相等也可能存在向量平行，所以②错误；

共线向量只能说明两个向量平行，不能说明相等，所以③错误；

平行于同一个非零向量的两个向量一定方向相同，必为共线向量，所以⑥正确．

综上所述，正确的命题为④⑥．

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题；共线向量；相等向量与相反向量

3. 下面几个命题：

①若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ；

②若 $|\vec{a}| = 0$ ，则 $\vec{a} = 0$ ；

③若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；

④若向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} // \vec{b} \end{cases}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；

其中正确命题的个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】①根据平面向量相等的定义知， $\vec{a} = \vec{b}$ 时，有 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

∴①正确；

②根据零向量的定义知， $|\vec{a}| = 0$ 时，有 $\vec{a} = \vec{0}$ ，

∴②错误；

③根据平面向量相等的定义知， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 时， $\vec{a} = \vec{b}$ 不一定成立，

∴③错误；

④根据平面向量相等的定义， $\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} // \vec{b} \end{cases}$ 时， $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，

∴④错误，

综上，正确的命题是①，共1个．

故选：B．

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题；共线向量；向量的模

3. 课堂巩固

4. 下列说法正确的是（ ）．

A. 单位向量一定是平行向量

B. 相等向量不一定是共线向量

C. 共线的单位向量一定是相等向量

D. 平行向量一定是共线向量

【答案】D

【解析】A 选项：单位向量是指模长为1，只提单位向量是无法判断其方向的，因此单位向量不一定是平行向量，故A错误；

B 选项：相等向量是指大小相等、方向相同的向量；共线向量是指方向相同或相反的向量．因此相等向量一定共线，故B错误；

C 选项：与B选项类似，共线的向量可能方向相同，也可能方向相反，当共线向量方向相反时不是相等向量，故C错误；

D 选项：平行向量（也叫共线向量）：方向相同或相反的向量叫做平行向量．故D正确．

故选 D．

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

5. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

1. 共线向量一定在同一条直线上.
2. 所有的单位向量都相等.
3. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线.
4. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $\vec{a} // \vec{b}$.
5. 向量 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ ，则 $AB // CD$.
6. 平行四边形两对边所在的向量一定是相等向量.

【答案】FFFTFF

【解析】1：平行向量也叫共线向量.

2：方向不一定相同.

3：当 $\vec{b} = \vec{0}$ 时， $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定共线.

4：向量平行即向量共线.

5：共线或平行.

6：方向不一定相同.

【标注】【知识点】共线向量

6. 给出下列四个命题：

- ①若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；
- ②若 A, B, C, D 是不共线的四点，则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件；
- ③若 $\vec{a} = \vec{b}$ ， $\vec{b} = \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{c}$ ；
- ④ $\vec{a} = \vec{b}$ 的充要条件是 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} // \vec{b}$.

其中正确命题的序号是（ ）.

A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ②④

【答案】C

【解析】A 选项：①若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，但两向量方向不一定相同，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 不一定成立，故①错误；

B 选项：

②若 A, B, C, D 是不共线的四点, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow AB = DC$ 且 $AB \parallel DC \Leftrightarrow$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 即 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件, 故②正确;

C选项: ③若 $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$, 故③正确;

D选项: ④ $\vec{a} = \vec{b}$ 的必要不充分条件是 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故④错误.

故选C.

【标注】【知识点】相等向量与相反向量; 平面向量概念辨析问题; 充要条件与向量结合

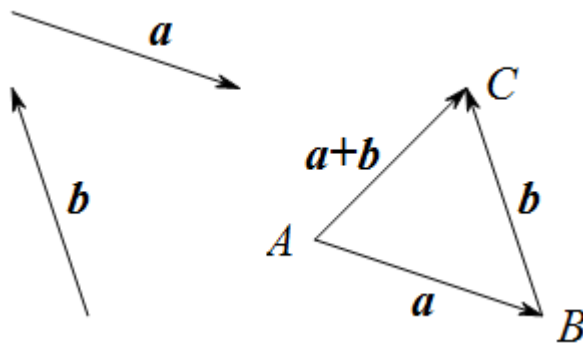
二、平面向量的线性运算

1. 知识讲解

加法运算

(1) 三角形法则

如下图:



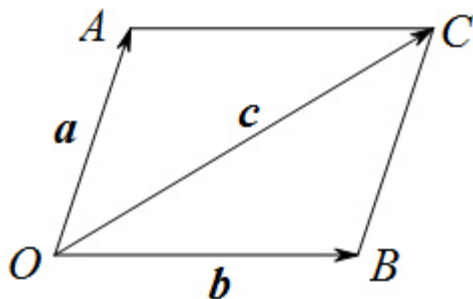
已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和, 记作 $\vec{a} + \vec{b}$, 即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

求两个向量和的运算, 叫做向量的加法. 这种求向量和的方法, 称为向量加法的三角形法则.

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型.

(2) 平行四边形法则

如下图:



以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作 $ABCD$ ，则以 O 为起点的对角线 $\vec{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量求和的多边形法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量。这个法则叫做向量求和的多边形法则。

【探究一】

对于任意两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，都有不等式 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 成立，请大家结合图形利用分类讨论的思想去探究，并给出下面问题的答案：

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 处于什么位置时，

- (1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ；
- (2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ (或 $|\vec{b}| - |\vec{a}|$)。

【探究二】

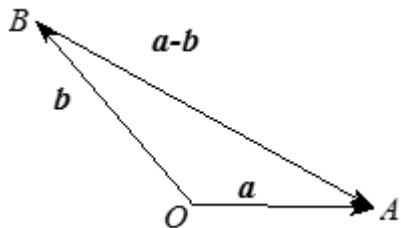
数的加法满足交换律与结合律，即对任意 $a, b \in \mathbf{R}$ ，有

$$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c).$$

那么任意向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的加法是否也满足交换律和结合律？请画图进行探索。

减法运算

如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点，被减向量的终点为终点的向量。又或者一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量。



推论：一个向量 $\vec{BA}$ 等于它的终点相对于点的位置向量 $\vec{OA}$ 减去它的始点相对于点的位置向量 $\vec{OB}$ ，或简记“终点向量减始点向量”。

数乘运算

我们规定实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的**数乘**，记作 $\lambda\vec{a}$ ，它的长度与方向规定如下：

$$(1) |\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|;$$

(2) 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反。

根据(1)可知，当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ 。

根据实数域向量的积的定义，可以验证下面的运算律。

设 λ, μ 为实数，那么：

$$(1) \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

$$(2) (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$$

$$(3) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

进一步运算，还可以得到：

$$(1) (-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}); (2) \lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}.$$

至此我们学习了向量的加法运算，减法运算和数乘运算，这三种运算统称为向量的线性运算。对于任意向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，以及任意实数 μ_1 、 μ_2 ，我们称 $\mu_1\vec{a} + \mu_2\vec{b}$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的线性组合，而且对于任意实数 λ ，恒有：

$$\lambda(\mu_1\vec{a} \pm \mu_2\vec{b}) = \lambda\mu_1\vec{a} \pm \lambda\mu_2\vec{b}.$$

2. 例题精讲

3. 课堂巩固

7. 下列各式化简正确的是()。

A. $\vec{OA} - \vec{OD} + \vec{DA} = \vec{0}$

B. $\vec{AB} + \vec{MB} + \vec{BO} + \vec{OM} = \vec{AB}$

C. $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{AC} = \vec{0}$

D. $0 \cdot \vec{AB} = 0$

【答案】B

【解析】A 选项： $\vec{OA} - \vec{OD} + \vec{DA}$
 $= \vec{OA} + \vec{DO} + \vec{DA}$

$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DA} \neq \vec{0} . \text{ 故A错误 .}$$

$$\text{B 选项: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM}$$

$$= \overrightarrow{AB} ,$$

故B正确 .

$$\text{C 选项: } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$

$$= 2\overrightarrow{AC} \neq \vec{0} ,$$

故C错误 .

$$\text{D 选项: } 0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \neq 0 ,$$

故D错误 .

故选 B .

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则

$$8. \text{ 在矩形 } ABCD \text{ 中, 若 } \overrightarrow{BC} = 5\vec{e}_1, \overrightarrow{DC} = 3\vec{e}_2, \text{ 则 } \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

【解析】 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 .$

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

$$9. \text{ 已知平面上不共线的四点 } O, A, B, C, \text{ 若 } \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}, \text{ 则 } \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 2

【解析】 因为 $\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} ,$
所以 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) ,$

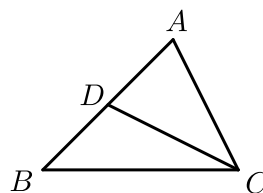
$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\text{所以 } \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = 2,$$

故答案为：2.

【标注】【知识点】平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

10. 如图所示， D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，则向量 $\overrightarrow{CD} = (\quad)$.



- A. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- B. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- C. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- D. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

【答案】 A

【解析】 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

故选A.

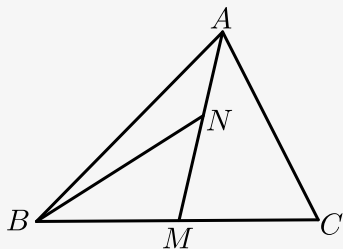
【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量基本定理及其意义

11. 在 $\triangle ABC$ 中， AM 为 BC 边上的中线，点 N 满足 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$ ，则 $\overrightarrow{BN} = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
- B. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$
- C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$
- D. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

【答案】 A

【解析】 $\because AM$ 为 BC 边上的中线，点 N 满足 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$ ，



$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}, \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

12. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量，则下列命题错误的是（ ）.

- A. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同
- B. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反
- C. 若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- D. 若 $||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

【答案】C

【解析】A选项：若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，则两边同时平方，根据向量的数量积可得：

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ 则} \\ 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \text{ 即 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1, \text{ 又因为 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \\ &\text{的夹角的取值范围为 } [0^\circ, 180^\circ], \text{ 所以 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 同向, 故A正确;} \end{aligned}$$

B选项：若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则等号两边同时平方可得：

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ 即} \\ 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| &= -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \text{ 所以 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -1, \text{ 又} \\ &\text{因为 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 的夹角的取值范围为 } [0^\circ, 180^\circ], \text{ 所以 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 的夹角为 } 180^\circ, \text{ 所以 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 反} \\ &\text{向, 故B正确;} \end{aligned}$$

C选项：若 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则由②可得 $2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = -2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，无法得出 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，故C错误；

D 选项：若 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则等号两边同时平方可得：

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ 即}$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ 则可得}$$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ，所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$ ，又因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的取值范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$ ，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 0° ，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，故 D 正确。

故选 C。

【标注】【知识点】向量的模；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长

13. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 是 AB 边上一点，若 $\vec{AD} = 2\vec{DB}$ ， $\vec{CD} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \lambda\vec{CB}$ ，则 $\lambda = ()$ 。
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

【答案】 A

【解析】 方法一：由 $\vec{AD} = 2\vec{DB}$ 得 $\vec{CD} - \vec{CA} = 2(\vec{CB} - \vec{CD})$ ，即 $\vec{CD} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CB}$ ，
所以 $\lambda = \frac{2}{3}$ 。

方法二：因为

$$\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = \vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{CA} + \frac{2}{3}(\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CB},$$

所以 $\lambda = \frac{2}{3}$ 。

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

4. 课堂巩固

14. 下列四式中不能化简为 $\vec{AD}$ 的是 ()。

- A. $(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{BC}$
 B. $(\vec{AD} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{CM})$
 C. $(\vec{MB} + \vec{AD}) - \vec{BM}$
 D. $(\vec{OC} - \vec{OA}) + \vec{CD}$

【答案】C

【解析】由题意得A选项： $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ，

B选项： $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD}$ ，

C选项： $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD}$ ，

D选项： $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ；由以上可得

只有C答案符合题意。

故答案选：C。

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的减法运算及运算规则

15. 若 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AB} = 3(\vec{a} - \vec{b})$ ， $\overrightarrow{CB} = 2(2\vec{a} + \vec{b})$ ， $\overrightarrow{OC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2\vec{a} - 3\vec{b}$

【解析】 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
 $= (\vec{a} + \vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})$
 $= 2\vec{a} - 3\vec{b}$ 。

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

16. 已知O是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，D为BC边中点，且 $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则有（ ）。

A. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$

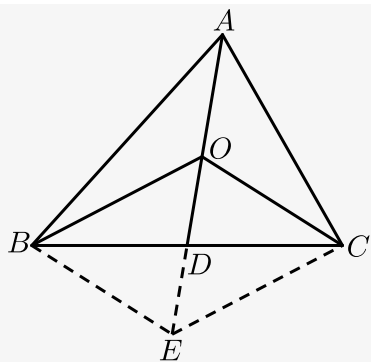
B. $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{OD}$

D. $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$

【答案】A

【解析】延长OD至E，使 $DE = OD$ ，连接BE、CE，如图所示；



$\therefore D$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点，

$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD},$$

$$\text{又 } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

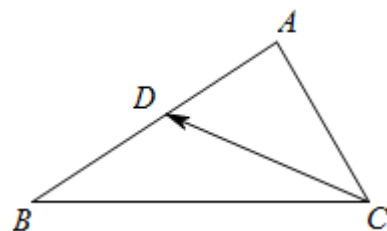
$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}.$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

17. 如图， D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 等于（ ）.



- A. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- B. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- C. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- D. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

【答案】 C

【解析】 $\because D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点， $\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$$\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

故选C.

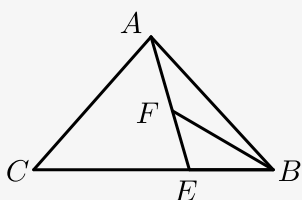
【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量中的三点共线问题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$, F 为 AE 的中点, 则 $\overrightarrow{BF} = ()$.

- A. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】C

【解析】



$\because F$ 为 AE 中点,

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则

19. 下列各式不正确的是().

- A. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向, 则 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
B. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$
C. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向, 则 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
D. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$

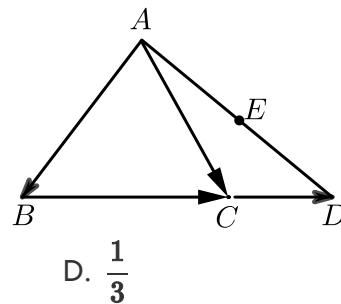
【答案】A

【解析】若 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向, 则 $||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 故 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = \pm|\vec{a} - \vec{b}|$. 故A不正确.

故选：A .

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；相等向量与相反向量；向量的模

20. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 是 BC 延长线上一点，点 E 为线段 AD 的中点，若 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$ ，且 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda = (\quad)$.



A. $-\frac{1}{4}$

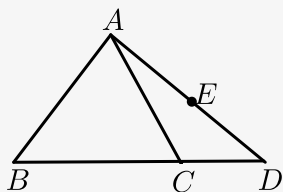
B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】



$$\begin{aligned} &\because E \text{ 为 } AD \text{ 中点,} \\ &\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \\ &\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \\ &\therefore \overrightarrow{AD} = 2\lambda\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \\ &\because D, C, B \text{ 共线,} \\ &\therefore 2\lambda + \frac{3}{2} = 1, \\ &\therefore \lambda = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

故选A .

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

三、共线向量定理及推论

1. 知识讲解

向量共线定理

向量共线的判定定理：

对于向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)、 $\vec{a}$ ，如果有一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，那么由向量数乘的定义知， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

向量共线的性质定理：

向量 $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) 与 $\vec{a}$ 共线，当且仅当有唯一的一个实数 λ ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

推论：

若A、B、C三点共线，当且仅当存在唯一的一个实数 λ ，使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 。

【探究一】

请采用分类讨论的思想仔细研究一定理中为何强调 $\vec{b}$ 是非零向量？

【探究二】

请证明如下结论：

对任意两个向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，若存在不全为0的实数对 (λ, μ) ，使 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线。

【提示】仍然是采取分类讨论的策略。

2. 例题精讲

21. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 不共线， $\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b}$ ($k \in \mathbf{R}$)， $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ，如果 $\vec{c} // \vec{d}$ ，那么 ()。

- A. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向
- B. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向
- C. $k = -1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向
- D. $k = 1$ 且 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 同向

【答案】A

【解析】 $\because \vec{c} // \vec{d}$ ，

$$\therefore \vec{c} = \lambda \vec{d}，$$

$$\therefore k\vec{a} + \vec{b} = \lambda \vec{a} - \lambda \vec{b}，$$

$$\therefore (k - \lambda)\vec{a} + (1 + \lambda)\vec{b} = \vec{0}，$$

$$\therefore \begin{cases} k = \lambda \\ 1 + \lambda = 0 \end{cases}，$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = -1 \\ k = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{c} = -\vec{d}.$$

故 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 反向.

故选 A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；共线向量

22. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个不共线的向量, 且向量 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线, 则实数 m 的值为 _____.

【答案】 -1或3

【解析】 因为向量 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线, 所以 $m = \frac{-3}{2-m}$,
解得 $m = -1$ 或 $m = 3$.

【标注】【知识点】共线向量

23. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线向量, $\vec{AB} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{BC} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{CD} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 则 A, B, C, D 中一定共线的三点是 ().

A. A, B, C

B. A, C, D

C. B, C, D

D. A, B, D

【答案】 B

【解析】 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2\vec{CD}$,
 $\therefore A, C, D$ 共线.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题

24. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量, 则实数 k 的值为 _____.

【答案】 -4

【解析】 $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是共线向量,
 $\therefore$ 存在实数 t , 使得: $\vec{a} = t\vec{b}$, 即 $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = t(2\vec{e}_1 - k\vec{e}_2)$,

$$\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2t\vec{e}_1 - k\vec{e}_2,$$

$$\text{解得: } t = \frac{1}{2}, k = -4.$$

故 k 的值为 -4 .

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；共线向量

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \lambda\vec{BC}$, 且 P, M, N 三点在一条直线上, 则 $\lambda =$ _____.

【答案】 -2

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中, $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \lambda\vec{BC}$,

$$\therefore \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB},$$

$$\vec{PM} = \vec{BM} - \vec{BP} = -\frac{2}{3}\vec{AB} - \lambda\vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{AB} - \lambda(\vec{AC} - \vec{AB}) = -\lambda\vec{AC} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\vec{AB}$$

又 P, M, N 三点在一条直线上,

$$\therefore \frac{-\lambda}{\frac{1}{4}} = \frac{\lambda - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}},$$

解得 $\lambda = -2$.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；平面向量基本定理及其意义

26. 设两个非零向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 如果 $\vec{AB} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{BC} = 2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$, $\vec{CD} = 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.
- (1) 求证: A, B, D 三点共线.
- (2) 试确定实数 k 的值, 使 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ 共线.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $k = \pm 1$.

【解析】 (1) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = 6\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 = 6\vec{AB}$, 所以 A, B, D 三点共线.

(2) 由于 $k\vec{e}_1 + \vec{e}_2 // \vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, 则 $k^2 = 1$, 解得 $k = \pm 1$.

【标注】【知识点】共线向量；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题；平面向量线性运算综合（非坐标）

3. 课堂巩固

27. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 且向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2\lambda - 1)\vec{b}$ 的方向相反, 则实数 λ 的值为 () .

A. 1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1或 $-\frac{1}{2}$

D. -1或 $-\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\frac{\lambda}{1} = \frac{1}{2\lambda - 1}$ 且 $\lambda < 0$,

$$\therefore 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, (2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0,$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = 1 \text{ (舍)},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2}.$$

故选 : B .

【标注】 【知识点】 平面向量概念辨析问题 ; 相等向量与相反向量

28. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 且 $\vec{a} + m\vec{b}$ 与 $\vec{b} - 3\vec{a}$ 共线, 则实数 m 的值为 () .

A. $\frac{1}{3}$

B. 3

C. -3

D. $-\frac{1}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because \vec{a} + m\vec{b}$ 与 $\vec{b} - 3\vec{a}$ 共线,

$$\therefore \vec{a} + m\vec{b} = \lambda(\vec{b} - 3\vec{a}),$$

$$\therefore (3\lambda + 1)\vec{a} + (m - \lambda)\vec{b} = \vec{0},$$

$\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,

$$\therefore \begin{cases} 3\lambda + 1 = 0 \\ m - \lambda = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{3}, m = -\frac{1}{3}.$$

故选 D .

【标注】 【知识点】 共线向量 ; 平面向量线性运算综合 (非坐标)

29. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} + 8\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, 则 () .

A. A, B, D 三点共线

B. A, B, C 三点共线

C. B, C, D 三点共线

D. A, C, D 三点共线

【答案】 A

【解析】 $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (-2\vec{a} + 8\vec{b}) + (3\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= \vec{a} + 5\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.
 $\therefore A, B, D$ 共线.
故选 A.

【标注】 【知识点】 共线向量；平面向量中的三点共线问题

30. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = k\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - 2\vec{b}$, 若 A, C, D 三点共线, 求实数 k 的值 _____.

【答案】 $-\frac{5}{2}$

【解析】 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 $= k\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}$
 $= (k+1)\vec{a} + 3\vec{b}$,
 $\because A, C, D$ 共线,
 $\therefore \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CD}$,
 $\therefore (k+1)\vec{a} + 3\vec{b} = \lambda(\vec{a} - 2\vec{b})$,
 $\therefore \frac{k+1}{1} = \frac{3}{-2}$,
 $\therefore -2k - 2 = 3$,
 $\therefore k = -\frac{5}{2}$.

【标注】 【知识点】 共线向量；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

31. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AC}$, 若 B, O, D 三点共线, 则 t 的值为 ().

A. $\frac{1}{4}$

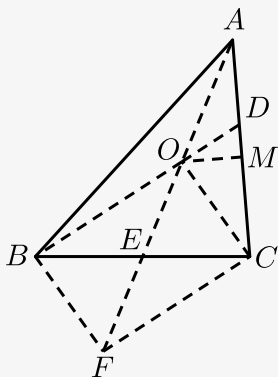
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 以 OB , OC 为邻边作平行四边形 $OBFC$, 连接 OF 与 BC 相交于点 E , E 为 BC 的中点.



$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OE},$$

$\therefore$ 点 O 是直线 AE 的中点.

$$\therefore \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AC}, \text{ } B, O, D \text{ 三点共线,}$$

$\therefore$ 点 D 是 BO 与 AC 的交点.

过点 O 作 $OM \parallel BC$ 交 AC 于点 M , 则点 M 为 AC 的中点.

$$\text{则 } OM = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{4}BC, \frac{DM}{DC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DM = \frac{1}{3}MC,$$

$$\therefore AD = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}.$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；平面向量的加法运算及运算规则

32. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是不共线的两个向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

(1) 求证: A, B, D 三点共线.

(2) 若 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, 且 B, D, F 三点共线, 求 k 的值.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $k = 12$.

【解析】 (1) $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2(\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2) = 2\overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BD},$$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点,

$\therefore A, B, D$ 三点共线.

(2) 由(1)可知 $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$, 且 $\overrightarrow{BF} = 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$,

$\therefore B, D, F$ 三点共线,

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BD},$$

$$\text{即 } 3\vec{e}_1 - k\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1 - 4\lambda \vec{e}_2,$$

$$\text{由题意 } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ 不共线, 得 } \begin{cases} \lambda = 3 \\ -k = -4\lambda \end{cases}.$$

解得 $k = 12$.

【标注】【知识点】共线向量