

平面向量的概念与线性运算-习题

一、选择题

1. 在平面中, $\vec{AB} \neq \vec{CD}$, 则 () .
- A. $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 的长度不相等
 - B. $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 的方向不相同
 - C. $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 不可能都是单位向量
 - D. $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 不可能都是零向量

【答案】 D

【解析】 A 选项: $\vec{AB} \neq \vec{CD}$ 可能长度相同, 但方向不同, 所以不正确 .

B 选项: $\vec{AB} \neq \vec{CD}$, 方向可能相同, 但大小不同, 所以不正确 .

C 选项: $\vec{AB} \neq \vec{CD}$, 可能都是单位向量, 但是方向不同, 所以不正确 .

D 选项: $\vec{AB} \neq \vec{CD}$, 不可能都是零向量, 所以正确 .

故选 D .

【标注】 【知识点】 零向量; 平面向量概念辨析问题

2. 下列命题正确的是 () .
- A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = 0$
 - B. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$
 - C. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为平行向量, 则 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向
 - D. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为单位向量, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】 D

【解析】 A、若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$, 所以A错误;

B、设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 此时 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 所以B错误;

C、若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为平行向量, 则 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 方向相同或相反, 所以C错误;

D、若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为单位向量, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 所以D正确.

综上所述, 答案选择: D.

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

3. 以下各说法中:

①若 $\vec{AB} // \vec{CD}$, 则A, B, C, D四点共线,

②若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是相反向量, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,

③若两非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线, 则对于 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 向量 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 必与 $\vec{a}$ 共线,

④若 $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$,

正确说法的序号是 ().

A. ①②③④

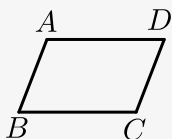
B. ②③④

C. ②④

D. ②③

【答案】 D

【解析】 ①若 $\vec{AB} // \vec{CD}$, 则AB和CD可以平行, 如右图平行四边形中 $\vec{AB} // \vec{CD}$, 但A, B, C, D不共线,



②若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是相反向量, 则 $\vec{a} = -\vec{b}$, 即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 故②正确,

③若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 则 $\vec{b} = t\vec{a}$,

$$\therefore \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu t\vec{a} = (\lambda + \mu t)\vec{a},$$

$\therefore \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线, 故③正确,

④若 $\vec{b} = \vec{0}$, 则 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 方向任意, 故④不正确,

综上所述, 正确的说法是②③.

故选: D.

【标注】【知识点】线段的定比分点公式; 共线向量; 相等向量与相反向量; 平面向量线性运算综合 (非坐标)

4. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充要条件是 ().

- A. $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相同
- B. $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量中至少有一个为零向量
- C. 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$
- D. 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$

【答案】D

【解析】A 选项： $\vec{a}, \vec{b}$ 共线不一定同向，A 错；

B 选项： $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量也可以共线，B 错；

C 选项：当 $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ 时， $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 不成立，C 错；

D 选项：若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，则由两向量共线知，存在 $\lambda \neq 0$ ，使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ，

即 $\lambda \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ ，

此时 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -1$ 成立。

故选 D。

【标注】【知识点】共线向量；充要条件与向量结合

5. 设 $\vec{a}$ 是非零向量， λ 是非零常数，下列结论中正确的为（ ）。

- A. $\vec{a}$ 与 $-\lambda \vec{a}$ 的方向相反
- B. $\vec{a}$ 与 $\lambda^2 \vec{a}$ 的方向相同
- C. $|\lambda \vec{a}| \geq |\vec{a}|$
- D. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

【答案】B

【解析】A 选项：若 $\lambda < 0$ ，则 $-\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同， $\therefore$ A 错；

B 选项： $\because \lambda \neq 0, \therefore \lambda^2 > 0, \therefore \lambda^2 \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同， $\therefore$ B 对；

C 选项：若 $\lambda = -\frac{1}{2}$ ， $|\lambda \vec{a}| = \left| \frac{1}{2} \vec{a} \right| < |\vec{a}|$ ，故 C 错；

D 选项： $|\lambda \vec{a}|$ 为数， $|\lambda| |\vec{a}|$ 为向量， $\therefore |\lambda \vec{a}|$ 与 $|\lambda| |\vec{a}|$ 不相等， $\therefore$ D 错。

故选 B。

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

6. 已知非零向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, 则向量 $\overrightarrow{OM} = ()$.
- A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$
 B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
 C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$
 D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{OB}$

【答案】A

【解析】由题可知 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$
 又 $\because \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}, \therefore \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$,
 整理的 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义

7. 在矩形 $ABCD$ 中, O 为两对角线交点, 若 $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{e_2}$, 则 $\overrightarrow{OC} = ()$.
- A. $\frac{1}{2}(5\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2})$
 B. $\frac{1}{2}(5\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2})$
 C. $\frac{1}{2}(3\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_1})$
 D. $\frac{1}{2}(5\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_1})$

【答案】A

【解析】因为 O 为 AC 的中点, 所以 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_1})$.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义; 平面向量线性运算综合(非坐标); 平面向量的加法运算及运算规则

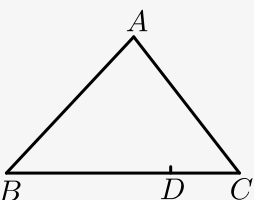
8. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 上有一点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 可表示为().
- A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
 B. $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

【解析】 $\because \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$,
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$,

由三角形模型知,



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

故A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量基本定理及其意义；向量分解中的待定系数法

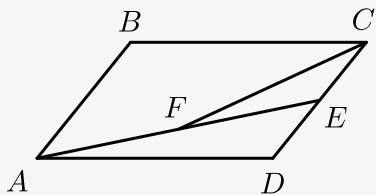
9. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为线段 CD 的中点, F 为线段 AE 的中点,则 $\overrightarrow{FC} = (\quad)$.

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$
 D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

【答案】B

【解析】 $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC}$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

故选B.



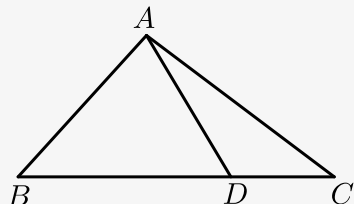
【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

10. 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，若面积 $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ACD}$ ，则 $\overrightarrow{AD}$ 可表示为（ ）。

- A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
- B. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- C. $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

【解析】方法一：



$$\because S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ACD}, \therefore BD : DC = 3 : 1,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

故选A.

方法二：设 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高为 h ，

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot h,$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot h \text{ 且 } S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore BD = 3CD,$$

利用定比分点可得：

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC},$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）

11. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个不共线的向量, 且 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线, 则实数 m 的值为 () .
- A. -1或3 B. $\sqrt{3}$ C. -1或4 D. 3或4

【答案】 A

【解析】 $\because \vec{a}, \vec{b}$ 不共线,
 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{a} + (2-m)\vec{b}$ 共线
 $\therefore \vec{a} + (2-m)\vec{b} = \lambda(m\vec{a} - 3\vec{b})$,
 $\therefore \begin{cases} 1 = \lambda m \\ 2 - m = -3\lambda \end{cases}$,
 $\therefore \lambda = \frac{1}{m}$,
 $2 - m = -\frac{3}{m}$,
 $\therefore m^2 - 2m - 3 = 0$,
 $\therefore (m-3)(m+1) = 0$,
 $\therefore m = 3$ 或 $m = -1$.
 故选 A .

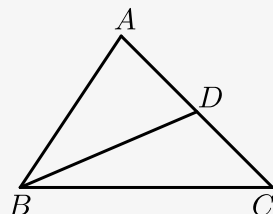
【标注】 【知识点】 共线向量；平面向量概念辨析问题

12. 设点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\vec{BC} + \vec{BA} = 2\vec{BP}$, 则 () .
- A. P, A, C 三点共线 B. P, A, B 三点共线
 C. P, B, C 三点共线 D. 以上均不正确

【答案】 A

【解析】 方法一：由平面向量的加法运算及 $\vec{BC} + \vec{BA} = 2\vec{BP}$, 可知点 P 为
 AC 中点,
 $\therefore P, A, C$ 三点共线, 故选 A .

方法二：如图, 取 AC 中点 D , 则：



$$\vec{BC} + \vec{BA} = 2\vec{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{2BD} = \overrightarrow{2BP},$$

$\therefore D$ 和 P 重合,

$\therefore P、A、C$ 三点共线.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；共线向量

13. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 8\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3(\vec{a} - \vec{b})$, 则A、B、C、D四点中共线的三点是().

A. A、B、C

B. A、C、D

C. B、C、D

D. A、B、D

【答案】 D

【解析】 由条件可知 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$, $\therefore A、B、D$ 三点共线.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量中的三点共线问题

14. 点C在线段AB上, 且 $|\overrightarrow{AC}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{CB}|$, 若 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda = ()$.

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $-\frac{5}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$.

故选D.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

15. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + m\vec{b} (m \neq 1)$, $\overrightarrow{AC} = n\vec{a} + \vec{b}$, 若A、B、C三点共线, 则实数 m, n 满足的条件为().

A. $m + n = 1$

B. $m + n = -1$

C. $mn = 1$

D. $mn = -1$

【答案】 C

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；共线向量

- 【答案】 D

故选D.

【标注】【知识点】平面向量中的三点共线问题；平面向量的加法运算及运算规则

- 【答案】 B

【解析】方法一：

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$, 故选B.

方法二: $\because \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$,

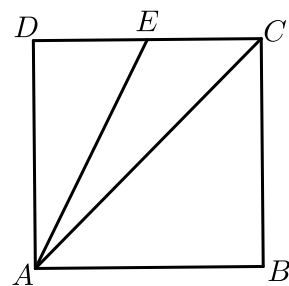
$\therefore$ 点M是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$,

$\therefore m = 3$.

【标注】【知识点】平面向量与三角形的“心”

18. 如图, 正方形ABCD中, E为DC的中点, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为().



A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. -1

【答案】 A

【解析】 $\because \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\therefore \lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$,
 $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标); 平面向量的加法运算及运算规则

二、解答题

19. 化简.

(1) $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP}$.

(2) $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA})$.

【答案】 (1) $\vec{0}$.

(2) $\overrightarrow{CD}$.

【解析】(1) $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP}$
 $= \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{NQ}$
 $= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}$
 $= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MN}$
 $= \vec{0}.$

(2) $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA})$
 $= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$
 $= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{CD}.$

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则

20. 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线.

- (1) 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} + 8\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3(\vec{a} - \vec{b})$, 求证: A、B、D 三点共线;
 (2) 求实数 k , 使 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + k\vec{b}$ 共线.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $k = \pm\sqrt{2}.$

【解析】(1) $\because$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{a} + 8\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b} = 6\vec{a} + 6\vec{b} = 6\overrightarrow{AB}$$

,

$\therefore$ A、B、D 三点共线.

(2) $\because k\vec{b} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + k\vec{b}$ 共线, $\therefore k\vec{a} + \vec{b} = \lambda(2\vec{a} + k\vec{b}) (\lambda \in \mathbf{R}).$

$$\therefore (k - 2\lambda)\vec{a} + (1 - \lambda k)\vec{b} = \vec{0}.$$

$$\therefore \begin{cases} k - 2\lambda = 0, \\ 1 - \lambda k = 0, \end{cases} \text{解得 } k = \pm\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】共线向量；平面向量中的三点共线问题

