

平面向量数量积-习题

一、选择题

1. 对任意向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 下列关系式中不恒成立的是 () .

- A. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- B. $|\vec{a} - \vec{b}| \leq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$
- C. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$
- D. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

【答案】 B

【解析】 $\because |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$,

又 $|\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq 1$,

$\therefore$ A恒成立.

选项B不恒成立, 由三角形的三边关系和向量的几何意义可得 $|\vec{a} - \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$,

选项C恒成立, 由向量数量积的运算可得 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$,

选项D恒成立, 由向量数量积的运算可得 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

故选B.

【标注】 【知识点】 平面向量数量积的运算律

2. 下列各式中, 恒成立的有 () .

- ① $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;
- ② $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
- ③ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
- ④ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 只有①③正确, ②只有在 $\vec{a} // \vec{b}$ 时成立, ④不一定成立.

【标注】 【知识点】 平面向量数量积运算 (非坐标); 平面向量数量积的运算律

3. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a , $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = ()$.
- A. $-\frac{3}{2}a^2$ B. $-\frac{3}{4}a^2$
C. $\frac{3}{4}a^2$ D. $\frac{3}{2}a^2$

【答案】 D

【解析】方法一： $\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 a ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BA}^2 = a^2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a \times a \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3a^2}{2},$$

故选：D.

方法二：由菱形 $ABCD$ 的边长为 a ， $\angle ABC = 60^\circ$ 可知 $\angle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (-\overrightarrow{AB}) \\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 = -a \cdot a \cos 120^\circ + a^2 = \frac{3}{2}a^2.\end{aligned}$$

故选D.

【标注】 **【知识点】** 向量的数量积的定义

4. 已知 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{-10}{5 \times 4} \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

5. 已知向量 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, 则 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = (\quad)$.

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$ **【答案】** D

【解析】 $|\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 9 - 3 = 7$.
 $\therefore |\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{7}$.

故选D.

【标注】【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长

6. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ()$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

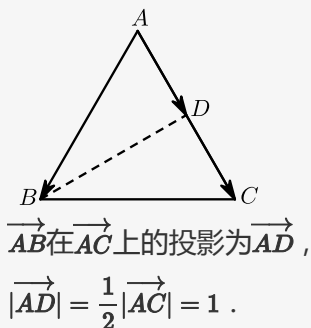
【答案】 A

【解析】 由 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$, 得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 10$,
 即 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 10$,
 由 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$, 得 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 6$,
 即 $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 6$,
 两式作差得: $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, 得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量数量积运算(非坐标); 向量的数量积的定义

7. 若 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形, 则 $\vec{AB}$ 在 $\vec{AC}$ 方向上的投影为 _____.

【答案】 1**【解析】****【标注】**【知识点】向量的数量积的定义；利用投影解决平面向量的数量积

8. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是 () .

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

【答案】 B

【解析】 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上投影为 } \vec{a} \cdot \cos \theta = |\vec{a}| \cdot \cos \theta = 2.$$

【标注】 【知识点】 向量的投影

9. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是 $-\frac{3}{2}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____ .

【答案】 $-\frac{9}{2}$

【解析】 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角为 θ , $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影是 $-\frac{3}{2}$, 即 $|\vec{a}| \cos \theta = -\frac{3}{2}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = 3|\vec{a}| \cos \theta = 3 \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{9}{2}.$$

【标注】 【知识点】 向量的投影; 利用投影解决平面向量的数量积

10. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的两个单位向量, $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则实数 k 的值为 ____ .

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】 $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

$$(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \cdot (k\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 0,$$

$$\therefore k\vec{e}_1^2 - 2\vec{e}_2^2 + (1 - 2k)\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0,$$

$$\because \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ 均为单位向量, 夹角为 } \frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore k - 2 + (1 - 2k) \times 1 \times 1 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = 0,$$

$$\therefore k - 2 + (1 - 2k) \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore 2k - 4 - 1 + 2k = 0,$$

$$\therefore k = \frac{5}{4}.$$

【标注】 【知识点】 平面向量数量积的运算律; 线性运算和数量积综合问题

11. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| = (\quad)$.

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. $-\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$,
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = 0$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|^2 = -1$,
 又 $\because (2\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$,
 $\therefore (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$,
 $\therefore \vec{b}^2 = -2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$,
 $\therefore |\vec{b}|^2 = 2$,
 又 $\because |\vec{b}| > 0$,
 $\therefore |\vec{b}| = \sqrt{2}$.
 故选A.

【标注】【知识点】向量的模；平面向量数量积运算（非坐标）；利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义

12. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为5, 则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = (\quad)$.

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为5,
 $\therefore \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = 5$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$,
 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = 4$.
 故选B.

【标注】【知识点】向量的模；向量的投影；利用向量数量积求模长；利用投影解决平面向量的数量积

13. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, 则 $2\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】 $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$,
 $\therefore (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2^2 - 6 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$,
 $\therefore 2\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 $\frac{\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{2}{2} = 1$.

【标注】【知识点】向量的投影

14. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -10$, 则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角是 ().

A. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】A

【解析】 $\because \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -10$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 = -10$,
 $\therefore |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta - |\vec{a}|^2 = -10$,
 $2 \times 6 \cos \theta - 4 = -10$,
 $12 \cos \theta = -6$,
 $\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$.
 故选A.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求夹角

15. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ().

A. 45°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

【答案】C

【解析】 $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$,
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$,

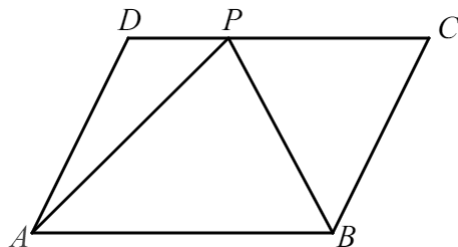
【答案】C

【解析】 $\because \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$,
 $\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,
 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$,
 $\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 4$,
 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 = 4$,
 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot 36 = 4$,
 $\therefore \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$,
 $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

二、填空题

18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 8$ ， $AD = 5$ ， $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$ ， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是_____.



【答案】22

【解析】方法一： $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16}\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = 2$,
所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22$.
方法二： $\because \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2 = \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2 = 25 - \frac{3}{16} \times 64 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$,
 $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22$.
故答案为：22 .

【标注】【知识点】用基底法求向量的数量积

三、解答题

19. 已知 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $(2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+\vec{b})=61$.

(1) 求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 θ_1 .

(2) 求 $|\vec{a}+\vec{b}|$.

(3) 若 $(\vec{b}-k\vec{a}) // \left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$, 求实数 k 的值.

【答案】 (1) 120° .

(2) $\sqrt{13}$.

(3) $\frac{1}{3}$.

【解析】 (1) $(2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+\vec{b})=61$,

$$\therefore 4\vec{a}^2 - 3\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 61.$$

$$\therefore 4|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta_1 = 61,$$

$$4 \times 4^2 - 3 \times 3^2 - 4 \times 4 \times 3 \cos \theta_1 = 61.$$

$$\therefore 64 - 27 - 61 = 48 \cos \theta_1,$$

$$\cos \theta_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \theta_1 = 120^\circ.$$

$$(2) |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

$$= 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 25 - 12$$

$$= 13,$$

$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}| > 0,$$

$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{13}.$$

$$(3) \therefore \vec{b}-k\vec{a} // \frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{b}-k\vec{a} = \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b} \right).$$

$$\therefore \left(1 + \frac{3}{2}\lambda \right) \vec{b} - \left(k + \frac{1}{2}\lambda \right) \vec{a} = 0.$$

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,

$$\therefore \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}\lambda = 0 \\ k + \frac{1}{2}\lambda = 0 \end{cases}.$$

$$\therefore \lambda = -\frac{2}{3}.$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；利用向量数量积求模长；共线向量；向量的夹角的判断；向量的模

20. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° .

(1) 求 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$ 的值.

(2) 当实数 x 为何值时, $x\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 垂直?

【答案】 (1) -34 .

(2) $-\frac{24}{5}$.

【解析】 (1)
$$\begin{aligned} & (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= 2\vec{a}^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ - 3|\vec{b}|^2 \\ &= 8 + 5 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 27 \\ &= 8 - 15 - 27 \\ &= -34. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & (x\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 3\vec{b}), \\ & \therefore (x\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 0, \\ & \therefore x\vec{a}^2 + (3x - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0, \\ & \therefore x|\vec{a}|^2 + (3x - 1)|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ - 3|\vec{b}|^2 = 0, \\ & \therefore 4x + (3x - 1) \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 27 = 0, \\ & \therefore 4x - 9x + 3 - 27 = 0, \\ & \therefore 5x = -24, \\ & x = -\frac{24}{5}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；平面向量数量积的运算律；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；平面向量数量积运算（非坐标）