

平面向量基本定理与坐标运算

一、平面向量基本定理

1. 知识讲解

平面向量基本定理

如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ，是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\mathbf{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$ 。

我们把不共线的向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

【温馨提示】

(1) 同一平面内，只要是一组不共线的非零向量，都可以作为基底，基底不同，那么同一向量对基底的分解结果就是不同的。

(2) 平面内任意一个向量都可以用该平面内的一组不共线的非零向量线性表示，这是平面向量基本定理的语言表述。

(3) 若给定了基底，那么分解形式是唯一的，也就是说，当 $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 给定，则 λ_1, λ_2 有唯一解。

(4) 由于零向量与任何向量都共线，因此零向量不能作为基底中的向量。

(5) 平面向量基本定理还可以稍加拓展为如下结论：

对于平面内任意三个不共线的向量中，任何一个向量都可表示为其余两个向量的线性组合且形式唯一。

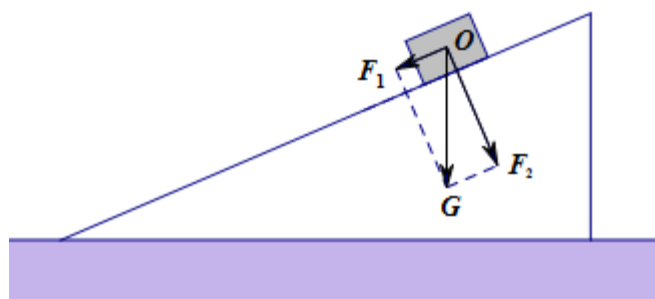
平面向量的正交分解和坐标表示

(1) 向量的正交分解

由平面向量的基本定理，对平面上的任意向量 $\vec{a}$ ，均可以分解为不共线的两个向量 $\lambda_1 \vec{a}_1$ 和 $\lambda_2 \vec{a}_2$ ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ 。

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的情形。把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解。

如下图：

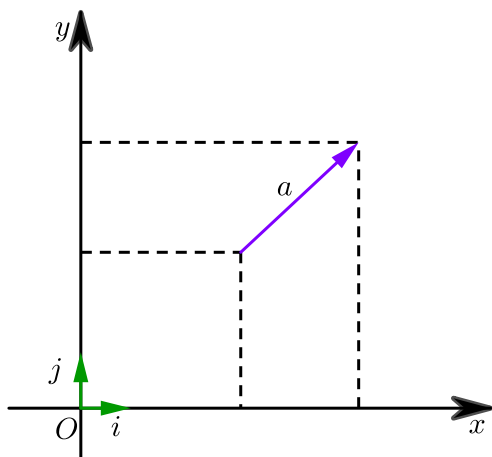


对于斜面上静止的物块，重力 $\mathbf{G}$ 沿互相垂直的两个方向分解就是正交分解．正交分解是向量分解中常见的一种情形．

在平面上，如果选取互相垂直的向量作为基底时，会为我们研究问题带来方便．

(2)平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系内，分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 作为基底，任作一个向量 $\mathbf{a}$ ，如图，由平面向量基本定理可知，有且仅有一对实数 x 、 y ，使 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ， (x, y) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 的(直角)坐标，记作 $\mathbf{a} = (x, y)$ ，叫做 $\mathbf{a}$ 在 x 轴上的坐标， y 叫做 $\mathbf{a}$ 在 y 轴上的坐标， $\mathbf{a} = (x, y)$ 叫做向量的坐标表示.



显然 $\mathbf{i} = (1, 0)$ ， $\mathbf{j} = (0, 1)$ ， $\mathbf{0} = (0, 0)$.

【温馨提示】

(1)点的坐标与向量的坐标的区别与联系

区别	表示形式不同	向量 $\mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中间用等号连接，而点 $A(x, y)$ 中间没有等号
	意义不同	点 $A(x, y)$ 的坐标 (x, y) 表示点 A 在平面直角坐标系中的位置， $\mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的坐标 (x, y) 既表示向量的大小，也表示向量的方向
联系		当平面向量的起点在原点时，平面向量的坐标与向量终点的坐标相同

注意：

(1) 学习了向量的坐标表示后， (x, y) 在平面直角坐标系内就有两层意义了，所以以后要加以区分，表示点坐标时称点 (x, y) ，表示向量时称向量 (x, y) 。

(2) 要把点坐标和向量坐标区分开，向量相等，则对应横纵坐标一定相同，但是始点和终点的坐标却可以不同。

2. 例题精讲

1. 关于平面向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ ，有下列四个命题：

- ①若 $\vec{a} // \vec{c}$ ， $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，则存在 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ；
- ②若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ ；
- ③存在不全为零的实数 λ, μ ，使得 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ；
- ④若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b} - \vec{c}$ 都是非零向量且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ 。

其中正确的命题的序号是 _____。

【答案】 ①④

【解析】 ①根据向量平行的定义判断，①正确。

②若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，而不是 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ 。②错误。

③ $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ， $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 作为基底，向量不能共线。③错误。

④ $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ ， $\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 。

同时, $\vec{a}$ 与 $(\vec{b} - \vec{c})$ 是非零向量 $\therefore$ ④正确.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量数量积的运算律；坐标表示平面向量的垂直；共线向量

2. 如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量, 那么下列四组向量中, 不能作为平面内所有向量的一组基底的是 ().

- A. $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- B. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- D. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 与 $-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

【答案】 D

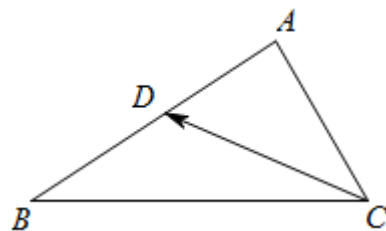
【解析】 基底的要求是不能共线,

D选项:

$$\begin{aligned} \because \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 &= -(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2), \\ \therefore \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 &\text{ 与 } -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ 共线.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

3. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, 则向量 $\vec{CD}$ 等于 ().



- A. $\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$
- B. $\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$
- C. $-\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$
- D. $-\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$

【答案】 C

【解析】 $\because D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点, $\therefore \vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

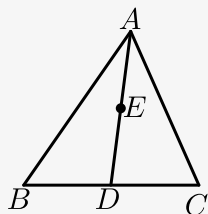
故选C.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量中的三点共线问题

4. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu = ()$.
- A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because E$ 为 AD 中点,

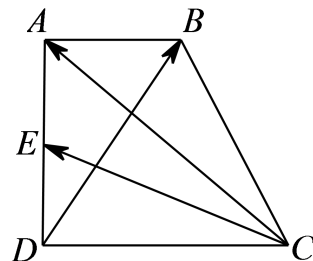


$$\begin{aligned} \text{由三角形模型知 } \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \\ \therefore \lambda &= -\frac{3}{4}, \mu = \frac{1}{4}. \\ \therefore \lambda + \mu &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故选: D.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标); 平面向量的加法运算及运算规则

5. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为().



A. $\frac{6}{5}$

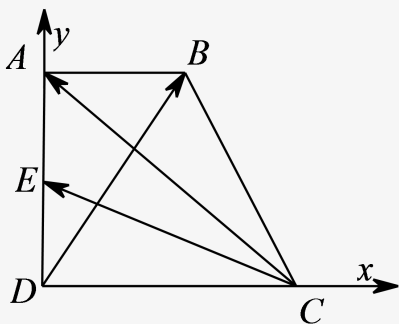
B. $\frac{8}{5}$

C. 2

D. $\frac{8}{3}$

【答案】B

【解析】如图，以 D 为原点， DC 为 x 轴， DA 为 y 轴建立平面直角坐标.



设 $AB = 1$, $DC = 2$.

则 $D(0,0)$, $E(0,1)$, $C(2,0)$, $A(0,2)$, $B(1,2)$.

$\therefore \overrightarrow{CA} = (-2, 2)$, $\overrightarrow{CE} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, 2)$.

$\therefore \overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$.

$\therefore (-2, 2) = (-2\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$.

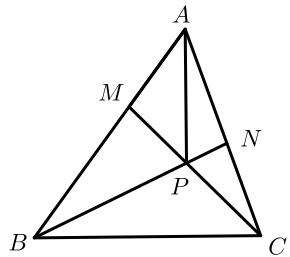
$\therefore \lambda = \frac{6}{5}$, $\mu = \frac{2}{5}$.

$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5}$.

故选B.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上分别取点 M 、 N ，使 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, BN 与 CM 交于点 P ，若 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PM} = \mu \overrightarrow{CP}$ ，则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为().



A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{6}$

D. 6

【答案】D

【解析】由题意， $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3+3\mu}\overrightarrow{AB} + \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC}$,
 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{NB} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2+2\lambda}\overrightarrow{AC}$.

根据平面向量基本定理，可得
$$\begin{cases} \frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{3+3\mu} \\ \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{\lambda}{2+2\lambda} \end{cases}, \therefore \mu = \frac{2}{3}, \lambda = 4.$$

$$\therefore \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6.$$

故选D.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；向量系数求值问题

3. 课堂巩固

7. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，给出下列四个命题：

- ① $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 可以表示平面内的所有向量；
- ②对于平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，使 $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ 的实数 λ, μ 有无数对；
- ③若向 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2$ 与 $\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$ 共线，则有且只有一个实数 λ ，使得 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2)$ ；
- ④若存在实数 λ, μ ，使 $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 = \vec{0}$ ，则 $\lambda = \mu = 0$ ，

其中假命题的是（ ）.

- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. 仅②

【答案】 B

【解析】 根据共面向量基本定理知①是真命题，②是假命题；

根据共线向量基本定理，若

$$\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 = \vec{0}, \lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 \neq \vec{0},$$

则不存在 λ 使

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2),$$

所以③是假命题；

若 λ, μ 有一个不为0，不妨设 λ 不等于0，则：

$$\vec{e}_1 = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{e}_2;$$

$\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共线，这与 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线矛盾，

$$\therefore \lambda = \mu = 0.$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义

8. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内所有向量的一组基底, 则下列四组向量中, 不能作为基底的是().

- A. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- B. $3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ 和 $6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$
- C. $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- D. $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

【答案】B

【解析】 $\because 2(3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2) = 6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$,
 $\therefore 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ 与 $6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$ 共线与基底必须为2个不共线向量矛盾.
 故选B.

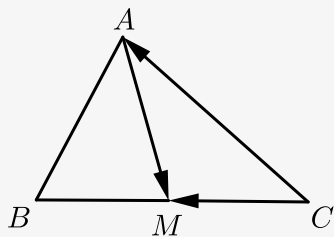
【标注】【知识点】平面向量线性运算综合(非坐标); 平面向量基本定理及其意义

9. 已知在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, 设 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, 则 $\vec{AM} =$ ().

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$
- B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
- C. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
- D. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】A

【解析】 $\vec{AM} = \vec{CM} - \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CA}$,
 $\because \vec{CB} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}$,
 $\therefore \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.



【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义; 平面向量线性运算综合(非坐标)

10.

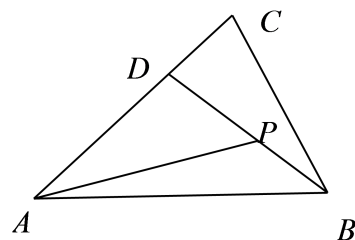
已知 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上的点, 且 $2BD = DC$, 若 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则
 $m - n =$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\because 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}, \therefore 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$,
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,
 $\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
 $= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
 $= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}$,
 $\therefore m - n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合 (非坐标)

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 () .



A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】 A

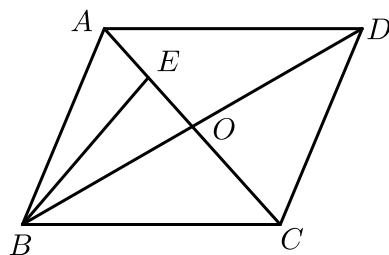
【解析】 $\because \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$,
 $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$,

$$\begin{aligned}\therefore \vec{AP} &= \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}, \\ \therefore \lambda &= \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{9}, \\ \text{则 } \lambda + \mu &= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}, \\ \text{故选: A.}\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量线性运算综合（非坐标）

12. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 相交于点 O ， E 为线段 AO 的中点，若

$$\vec{BE} = \lambda \vec{BA} + \mu \vec{BD} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}), \text{ 则 } \lambda + \mu = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】由题意得 $\vec{BD} = 2\vec{BO}$ ， $\vec{BE} = \lambda \vec{BA} + \mu \vec{BD}$ ，
 $\therefore \vec{BE} = \lambda \vec{BA} + 2\mu \vec{BO}$ ，
 $\because E$ 为线段 AO 的中点，
 $\therefore \vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BO})$ ，
 $\therefore \lambda = \frac{1}{2}$ ， $\mu = \frac{1}{4}$ ，
 $\therefore \lambda + \mu = \frac{3}{4}$ 。

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；向量系数求值问题

二、平面向量的坐标运算

1. 知识讲解

线性运算及数量积坐标表示

(1) 若 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。

(2) 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

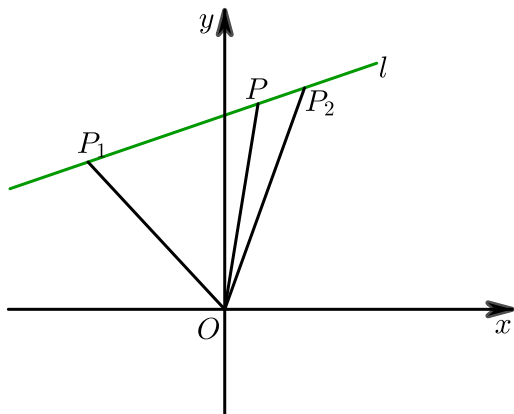
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

📍 定比分点的坐标表示

(1) 线段定比分点的定义

如图，设 P_1, P_2 是直线 l 上两点，点 P 是 l 上不同于 P_1, P_2 的任意一点，则存在一个实数 λ ，使 $\vec{P_1P} = \lambda \vec{P_1P_2}$ ， λ 叫做点 P 分有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 所成的比， P 点叫做有向线段 $\vec{P_1P_2}$ 以 λ 为定比的定比分点。



(2) 定比分点的坐标表示

设 O 为坐标原点，若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P(x, y), \vec{P_1P} = \lambda \vec{P_1P_2}$ ，

$$\vec{OP} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{OP_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OP_2},$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

故点 P 的坐标为 $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda})$.

【温馨提示】

在使用定比分点坐标公式时，应明确 $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的意义，它们分别为分点、始点、终点的坐标但在具体问题的计算中，往往是自行确定始点、分点、终点，因此应用时要注意对应。

2. 例题精讲

 坐标表示

13. 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, 向量 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC} = ()$.

- A. $(-7, -4)$ B. $(7, 4)$ C. $(-1, 4)$ D. $(1, 4)$

【答案】 A

【解析】 由已知可得 $\overrightarrow{BA} = (-3, -1)$, $\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (-7, -4)$.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则

14. 已知 $\vec{a} = (5, -2)$, $\vec{b} = (-4, -3)$, $\vec{c} = (x, y)$, 若 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{c}$ 等于().

- A. $\left(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ B. $\left(1, \frac{8}{3}\right)$
C. $\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$ D. $\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 由题知： $\vec{a} = (5, -2)$, $\vec{b} = (-4, -3)$, $\vec{c} = (x, y)$,

因为 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$,

$$\text{所以} \begin{cases} 5 + 8 + 3x = 0 \\ -2 + 6 + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\text{故} \vec{c} = \left(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

 平行垂直问题

15. 已知 $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量是().

- A. $\vec{e} = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$
B. $\vec{e} = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 或 $\vec{e} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$
C. $\vec{e} = (-6, 2)$
D. $\vec{e} = (-6, 2)$ 或 $\vec{e} = (6, -2)$

【答案】 B

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (-6, 2)$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$,

所以与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量是 $\left(\frac{-6}{2\sqrt{10}}, \frac{2}{2\sqrt{10}}\right)$ 或 $\left(\frac{6}{2\sqrt{10}}, \frac{-2}{2\sqrt{10}}\right)$,

即 $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 或 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

故选B.

【标注】 【知识点】 利用向量数量积求模长；单位向量；共线向量；坐标表示平面向量的共线

16. 若 $\overrightarrow{OA} = (7, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 0)$, 则与向量 $\overrightarrow{BA}$ 垂直的单位向量是().

A. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

D. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because \overrightarrow{OA} = (7, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 0)$,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (3, 4),$$

$\vec{n} = (4, -3)$ 为一个与 $\overrightarrow{BA}$ 垂直的向量,

$$|\vec{n}| = 5,$$

$\therefore \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 为与 $\overrightarrow{BA}$ 垂直的单位向量.

故选B.

【标注】 【知识点】 利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；单位向量；平面向量概念辨析问题；坐标表示平面向量的垂直

17. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = (3, 4)$. 若 λ 为实数, $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \parallel \vec{c}$, 则 $\lambda =$

).

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because$ 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = (3, 4)$.

$$\therefore \vec{a} + \lambda\vec{b} = (1 + \lambda, 2),$$

$$\therefore (\vec{a} + \lambda \vec{b}) // \vec{c},$$

$$\therefore 4(1 + \lambda) - 6 = 0,$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2},$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直

18.

已知点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = 3$, 则点 P 的坐标为().

A. $\left(3, -\frac{11}{2}\right)$
C. $\left(2, -\frac{11}{2}\right)$

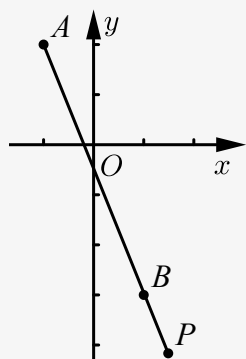
B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$
D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】

点 $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = 3$,

如图所示:



设点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$\vec{AP} = (x + 1, y - 2), \vec{PB} = (1 - x, -3 - y).$$

$$\text{且 } \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = -3,$$

$$\text{即 } \begin{cases} x + 1 = -3(1 - x) \\ y - 2 = -3(-3 - y) \end{cases},$$

$$\text{解得 } x = 2, y = -\frac{11}{2},$$

$$\therefore \text{点} P \text{为} \left(2, -\frac{11}{2}\right).$$

故选：C.

【标注】【知识点】利用平面向量求解坐标

19. 设向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (2, -2)$, 若 $(\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 $\lambda = ()$.
- A. ± 1 B. 0 C. $\pm\sqrt{2}$ D. ± 2

【答案】 C

【解析】 $\because \vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$,
 $\vec{b} = (2, -2)$,
 $\therefore |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$,
 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,
 $\because (\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp (\lambda\vec{a} - \vec{b})$,
 $\therefore (\lambda\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\lambda\vec{a} - \vec{b}) = 0$,
 $\therefore \lambda^2 \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$,
 $\therefore \lambda^2 |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$,
 $\therefore 4\lambda^2 = 8$,
 $\therefore \lambda = \pm\sqrt{2}$.
 故选C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算

20. 已知两点 $A(1, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$, O 为坐标原点, 点 C 在第二象限, 且 $\angle AOC = 120^\circ$, 设 $\vec{OC} = -2\vec{OA} + \lambda\vec{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 λ 等于 ().
- A. -1 B. 2 C. 1 D. -2

【答案】 C

【解析】 $\because A(1, 0)$, 点 C 在第二象限, $\angle AOC = 120^\circ$,
 $\therefore$ 设点 C 的坐标为 $(r \cos 120^\circ, r \sin 120^\circ) = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$, 其中 $r > 0$.

$$\begin{aligned}
&\therefore A(1,0), \\
&\therefore \overrightarrow{OA} = (1,0), \\
&\text{同理可知 } \overrightarrow{OB} = (1, \sqrt{3}), \overrightarrow{OC} = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right). \\
&\therefore \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}, \\
&\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}r = -2 \times 1 + \lambda \cdot 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r = -2 \times 0 + \lambda \cdot \sqrt{3} \end{cases} \\
&\therefore r = 2, \lambda = 1. \\
&\text{故选C.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；向量分解中的待定系数法；平面向量线性运算综合（非坐标）

向量夹角

21. 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $|\vec{c}| = \sqrt{5}$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 () .
- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【答案】 C

【解析】 $\therefore \vec{b} = (-2, -4)$,
 $\vec{a} = (1, 2)$,
 $\therefore |\vec{a}| = \sqrt{5}$,
 $\therefore \vec{b} = -2\vec{a}$,
 又 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$,
 $\therefore -\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$,
 $\therefore -|\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta = \frac{5}{2}$,
 $-\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos \theta = \frac{5}{2}$,
 $\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore \theta = 120^\circ$.
 故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

22. 已知 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (4, -7)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 x 的取值范围为 _____.

【答案】 $x > \frac{5}{2}$

【解析】 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为锐角,

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ 且 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 不共线, } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0,$$

$$\therefore 4(x+1) - 14 > 0$$

$$\therefore 4x > 10,$$

$$x > \frac{5}{2},$$

$$\frac{x+1}{4} \neq \frac{2}{-7},$$

$$\therefore -7x - 7 \neq 8,$$

$$\therefore -7x \neq 15$$

$$x \neq -\frac{15}{7}.$$

$$\text{综上, } x > \frac{5}{2}.$$

$$\text{故答案为: } x > \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式; 利用向量数量积求夹角; 线性运算和数量积综合问题; 向量的夹角的判断

🕒 投影问题

23. 已知向量 $\vec{OA} = (2, 10)$, $\vec{OB} = (4, 3)$, 则向量 $\vec{AB}$ 在向量 $\vec{OB}$ 方向上的投影为 ().

A. 13

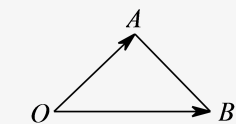
B. $\frac{13}{5}$

C. $-\frac{13}{5}$

D. $\frac{38}{5}$

【答案】 C

【解析】 向量 $\vec{AB}$ 在向量 $\vec{OB}$ 方向上的投影为:



$$\begin{aligned} & |\vec{AB}| \cdot \cos \angle OBA \\ &= |\vec{AB}| \cdot \frac{\vec{AB} \cdot \vec{OB}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{OB}|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -7), \\ \therefore \text{原式} &= \sqrt{4+49} \cdot \frac{8-21}{\sqrt{4+49} \times 5} = -\frac{13}{5},\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】向量的投影

模长与数量积

24. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, y)$, $\vec{c} = (2, -4)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = (\quad)$.
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. 10

【答案】C

【解析】 $\because \vec{a} \perp \vec{c}$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$,
 $2x + 1 \times (-4) = 0$,
 $\therefore x = 2$,
 $\because \vec{b} // \vec{c}$,
 $\therefore \frac{1}{2} = \frac{y}{-4}$,
 $\therefore y = -2$,
 $\therefore \vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2)$,
 $\therefore \vec{a} + \vec{b} = (3, -1)$,
 $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
 故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；向量的模

25. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$. 若 $\vec{c} = \vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b}$, 则 $|\vec{c}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $8\sqrt{2}$

【解析】方法一：

$$\vec{c} = \vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = (2, 4) - [2 \times 1 + 4 \times (-2)] \times (1, -2)$$

$$= (8, -8),$$

$$\text{则 } |\vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\text{方法二: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-1) + 4 \times 2 = 6,$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$$

$$= \vec{a} - 6\vec{b}$$

$$= (8, -8),$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】向量的模；数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）；利用向量数量积求模长；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

26. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\frac{2\pi}{3}$, $\vec{a} = (2, 0)$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值为 ().

A. $2\sqrt{3}$

B. $-2\sqrt{3}$

C. -2

D. 2

【答案】 C

$$\text{【解析】 } \because (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 12,$$

$$\therefore \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 12,$$

$$\therefore 2 \times 2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{2}{3}\pi = 12,$$

$$4 + 4|\vec{b}|^2 + 4 \times 2 \cdot |\vec{b}| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12,$$

$$\therefore 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{b}| - 8 = 0,$$

$$|\vec{b}|^2 - |\vec{b}| - 2 = 0,$$

$$\left(|\vec{b}| - 2\right)\left(|\vec{b}| + 1\right) = 0,$$

$$\text{又 } \because |\vec{b}| \geq 0,$$

$$\therefore |\vec{b}| = 2,$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{2}{3}\pi = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2,$$

故选 C.

【标注】【知识点】向量的模；平面向量数量积的运算律；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）

3. 课堂巩固

坐标表示

27. 已知 $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$, A 点坐标为 $(-2, -1)$, 则 B 点坐标为 ().

- A. $(5, 5)$ B. $(-5, -5)$ C. $(1, 3)$ D. $(-5, 5)$

【答案】 C

【解析】 设 $B(x, y)$,

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (x, y) - (-2, -1) = (x+2, y+1) = (3, 4),$$

$$\text{则 } \begin{cases} x+2=3 \\ y+1=4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示；平面向量线性运算综合（非坐标）

28. 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} =$ _____.

- A. $(3, 7)$ B. $(5, 9)$
C. $(5, 7)$ D. $(3, 9)$

【答案】 C

【解析】 $\because \vec{a} = (2, 4)$,

$$\vec{b} = (-1, 1),$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (4, 8) - (-1, 1)$$

$$= (5, 7).$$

故选 C.

【标注】 【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

平行垂直问题

29. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, 则与 $\vec{a}$ 平行的单位向量的坐标为 ().

- A. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
B. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

- C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
 D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

【答案】D

【解析】已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$,

设与 $\vec{a}$ 平行的单位向量是 $(m, -2m)$,

则 $m^2 + (-2m)^2 = 1$, 解得: $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$,

故该单位向量的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

故选: D.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直; 坐标表示平面向量的共线

30. 已知点 $A(1, 3)$, $B(4, -1)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 ().

- A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
 C. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

【答案】A

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, 则与其同方向的单位向量 $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线; 平面向量的正交分解及坐标表示

31. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 若 $(m\vec{a} + n\vec{b}) \parallel (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 $\frac{m}{n}$ 等于 ().

A. 2 B. -2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】 $\because \vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$,

$\therefore m\vec{a} + n\vec{b} = (2m - n, 3m + 2n)$, $\vec{a} - 2\vec{b} = (4, -1)$,

$\therefore (m\vec{a} + n\vec{b}) \parallel (\vec{a} - 2\vec{b})$,

$$\therefore \frac{2m-n}{4} = \frac{3m+2n}{-1},$$

$$\therefore n-2m=12m+8n,$$

$$\therefore -7n=14m,$$

$$\therefore \frac{m}{n} = -\frac{1}{2}.$$

故选C

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

32. 已知两点 $A(3, -4)$, $B(-9, 2)$ 在直线 AB 上, 在直线 AB 上求一点 P , 使 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$.

【答案】 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

【解析】 设点 P 的坐标为 (x, y) ,

①若点 P 在线段 AB 上, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$.

$$\therefore (x-3, y+4) = \frac{1}{2}(-9-x, 2-y),$$

$$\text{解得 } x = -1, y = -2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1, -2)$.

②若点 P 在线段 BA 的延长线上, 则 $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$,

$$\therefore (x-3, y+4) = -\frac{1}{4}(-9-x, 2-y),$$

$$\text{解得 } x = 7, y = -6,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(7, -6)$.

综上可得点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(7, -6)$.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量中的三点共线问题；向量的模

33. 已知向量 $\vec{m} = (\lambda + 1, 1)$, $\vec{n} = (\lambda + 2, 2)$, 若 $(\vec{m} + \vec{n}) \perp (\vec{m} - \vec{n})$, 则 $\lambda = ()$.

A. -4

B. -3

C. -2

D. -1

【答案】 B

【解析】 $\vec{m} + \vec{n} = (2\lambda + 3, 3)$, $\vec{m} - \vec{n} = (-1, -1)$,

$$\therefore (2\lambda + 3) \times (-1) - 3 = 0,$$

$$\therefore \lambda = -3.$$

故选：B.

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）

34. 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$, O 为坐标原点, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 45^\circ$, 设

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R}) \text{ 则 } \lambda = (\quad).$$

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】根据已知条件得 A, B, C , 三点共线, 并且 $\angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$, 在 $y = -x$ 线上.

设 $C(x, -x)$, $\because A(-3, 0), B(0, 2)$.

$$\therefore \overrightarrow{OC} = (x, -x), \overrightarrow{OA} = (-3, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 2).$$

$$\lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} = (-3\lambda, 2 - 2\lambda).$$

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ -x = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}.$$

故选A.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直



向量夹角

35. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为().

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

【答案】B

$$\text{【解析】} \because \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \vec{a}, \vec{b} \text{ 夹角为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选B.

【标注】【知识点】向量的夹角的判断；利用向量数量积求夹角

36. 已知 $\vec{a} = (\lambda, 2)$, $\vec{b} = (-3, 5)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 则 λ 的取值范围是().

A. $\lambda > \frac{10}{3}$
 C. $\lambda < \frac{10}{3}$

B. $\lambda \geq \frac{10}{3}$
 D. $\lambda \leq \frac{10}{3}$

【答案】A

【解析】 $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，
 $\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$. 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. 且 $5\lambda + 6 \neq 0$ ，
 $\therefore -3\lambda + 10 < 0$. 且 $\lambda \neq -\frac{6}{5}$ ，
 $\therefore \lambda > \frac{10}{3}$.
 故选A .

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；利用向量数量积求夹角；向量的夹角的判断

投影问题

37. 已知点 $A(-1, 1)$ ， $B(0, 3)$ ， $C(3, 4)$ ，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影为 _____ .

【答案】2

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (4, 3)$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 5$ ，
 故 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影为 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 3}{5} = 2$.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

模长与数量积

38. 设平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, y)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 等于() .

A. 4

B. 5

C. $3\sqrt{5}$

D. $4\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以有 $1 \times y + 2 \times (-2) = 0$ ，解得 $y = 4$. 于是 $2\vec{a} - \vec{b} = (4, 8)$ ，
 所以 $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；平面向量数量积的运算律

39. 向量 $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\quad)$.

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

【答案】B

【解析】 $\because \vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$,

$$2\vec{a} + \vec{b} = (1, 0),$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 1.$$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

40. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$, 则 $|\vec{b}|$ 等于 ().

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

C. 5

D. 25

【答案】C

【解析】由题可知, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{5 + 2 \times 10 + |\vec{b}|^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } |\vec{b}| = 5.$$

故选C.

【标注】【知识点】利用向量数量积求模长；向量的数量积的定义