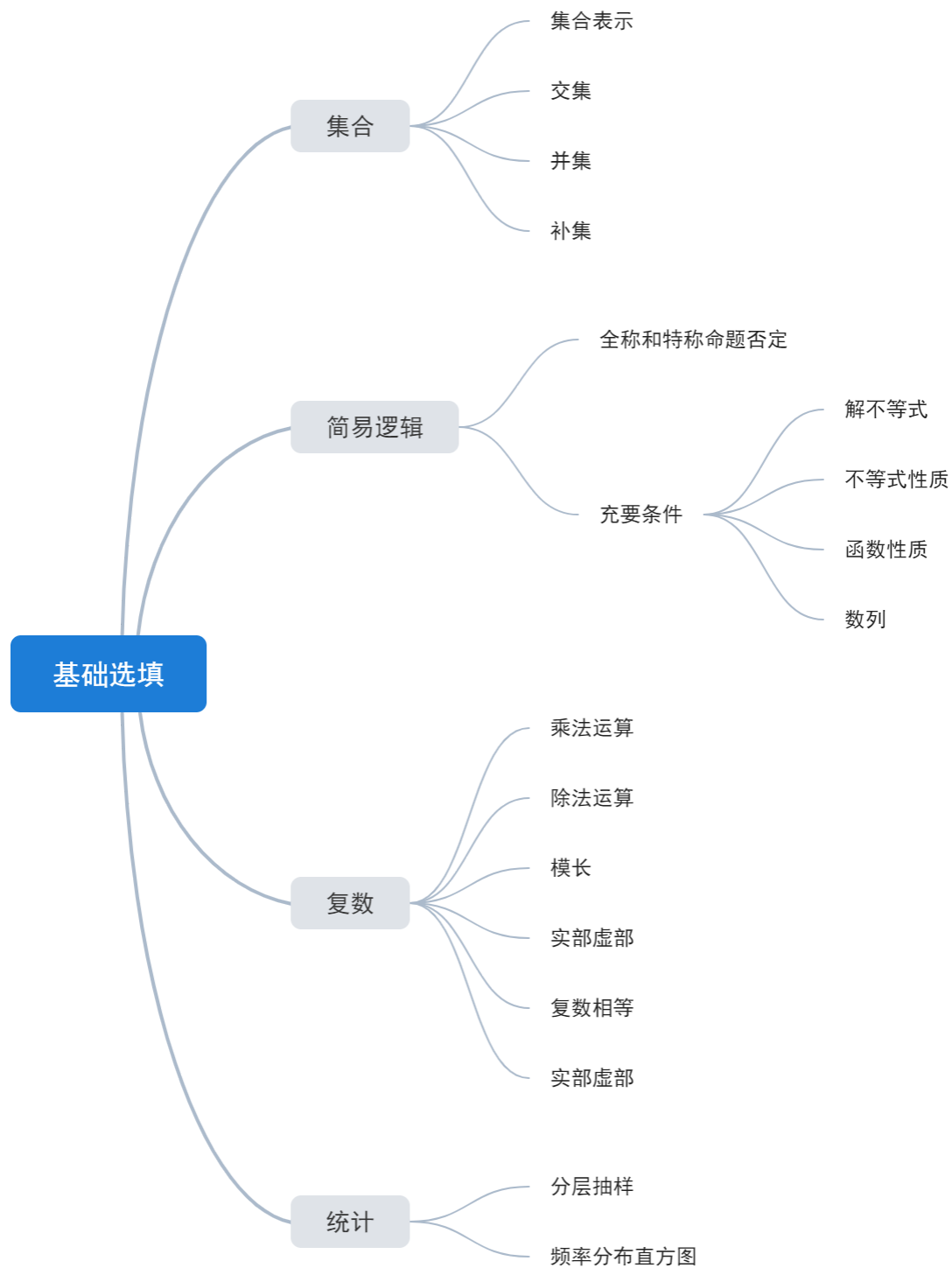


第三讲-集合、简易逻辑、复数和统计

1. 知识梳理



一、集合

1. 真题分析

集合的表示

1. 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| \leq 5\}$ 中的最小整数为 _____ .

【答案】 -3

【解析】不等式 $|x-2| \leq 5$,

即 $-5 \leq x - 2 \leq 5$, $-3 \leq x \leq 7$,

所以集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 7\}$,

所以最小的整数为 -3 .

【标注】【知识点】集合不同表示法的转化问题；描述法

 交集

2. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 3x - 2, x \in A\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{1\}$

B. $\{4\}$

C. $\{1, 3\}$

D. $\{1, 4\}$

【答案】 D

【解析】 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$,

$$\therefore A \cap B = \{1, 4\}.$$

故选D.

【标注】 **【知识点】** 交集

3. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $(-\infty, 2]$

B. [1, 2]

C. $[-2, 2]$

D. $[-2, 1]$

【答案】 D

【解析】 $\because A = \{x | |x| \leq 2\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $\therefore A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$, 选D.

【标注】【知识点】交集

4. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x - 1| < 2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A \cap \mathbf{Z}$ 中所有元素的和等于 _____.

【答案】3

【解析】 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x - 1| < 2\} = \{x | -1 < x < 3\}$.

$\therefore A \cap \mathbf{Z} = \{0, 1, 2\}$, 即 $0 + 1 + 2 = 3$.

【标注】【知识点】交集

5. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x + 2| < 3\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{R} | (x - m)(x - 2) < 0\}$, 且 $A \cap B = (-1, n)$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.

【答案】-1; 1

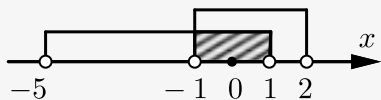
【解析】 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x + 2| < 3\}$

$= \{x \in \mathbf{R} | -5 < x < 1\}$,

由 $A \cap B = (-1, n)$, 可知 $m < 1$,

则 $B = \{x | m < x < 2\}$,

画出数轴,



可得 $m = -1$, $n = 1$.

【标注】【知识点】交集

6. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x + 3| + |x - 4| \leq 9\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$, 则集合 $A \cap B =$ _____.

【答案】 $\{x | -2 \leq x \leq 5\}$

【解析】 $\because A = \{x \in \mathbf{R} | |x + 3| + |x - 4| \leq 9\} = \{x \in \mathbf{R} | -4 \leq x \leq 5\}$,

$B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\sqrt{4t \times \frac{1}{t}} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$

$$= \{x \in \mathbf{R} | x \geq -2\},$$

$$\therefore A \cap B = \{x \in \mathbf{R} | -4 \leq x \leq 5\} \cap \{x \in \mathbf{R} | x \geq -2\} = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x \leq 5\}.$$

【标注】【知识点】交集

并集

7. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x < 3\}$, 则 $(A \cap C) \cup B = (\quad)$.

A. $\{2\}$

B. $\{2, 3\}$

C. $\{-1, 2, 3\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

【答案】D

【解析】设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x < 3\}$,

则 $A \cap C = \{1, 2\}$,

$\therefore B = \{2, 3, 4\}$,

$\therefore (A \cap C) \cup B = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

故选：D.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

8. 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | -1 \leq x \leq 5\}$, 则 $(A \cup B) \cap C = (\quad)$.

A. $\{2\}$

B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{1, 2, 4, 6\}$

D. $\{x \in \mathbf{R} | -1 \leq x \leq 5\}$

【答案】B

【解析】 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 6\} \cap [-1, 5] = \{1, 2, 4\}$, 故选B

【标注】【素养】数学运算

【知识点】交集；并集

9. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | -1 \leq x < 2\}$, 则 $(A \cup B) \cap C = (\quad)$.

A. $\{-1, 1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{-1, 0, 1\}$

D. $\{2, 3, 4\}$

【答案】 C

【解析】 由题意知 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 故 $(A \cup B) \cap C = \{-1, 0, 1\}$.

【标注】 【知识点】 并集

10. 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $(A \cup B) \cap C = ()$.

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{1, 2, 4, 6\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

【答案】 B

【解析】 $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4\}$.

【标注】 【知识点】 并集

 补集

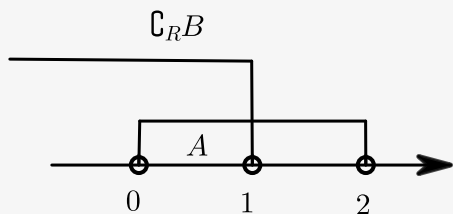
11. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = ()$.

- A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x < 1\}$
C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

【答案】 B

【解析】 由 $B = \{x | x \geq 1\}$, 得 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x < 1\}$, 借助于数轴, 可得

$A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | 0 < x < 1\}$, 故选 B.



【标注】 【知识点】 补集

12. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{2, 3, 5\}$, 集合 $B = \{1, 3, 4, 6\}$, 则集合 $A \cap \complement_U B = ()$.

- A. $\{3\}$ B. $\{2, 5\}$ C. $\{1, 4, 6\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

【答案】 B

A. $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$
 C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

B. $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$
 D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

【答案】 D

【解析】 $\because A = \left[-1, \frac{2}{3}\right] B = \left(\frac{1}{2}, 1\right], \therefore A \cap B = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

【标注】 【知识点】 交集

16. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$, 集合 $N = \left\{x \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right.\right\}$, 则 $M \cup N = ()$.
- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$
 C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbf{R}$

【答案】 D

【解析】 $M = \{x | (x+1)(x+2) > 0\} = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$,
 $N = \{x | 2^{-x} \leq 2^2\} = [-2, +\infty)$, 故 $M \cup N = \mathbf{R}$.

【标注】 【知识点】 并集

17. 已知集合 $A = \{x | 2^x > 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 0\}$, 则 $\complement_A B = ()$.
- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 $A = \{x | 2^x > 1\} = \{x | x > 0\}$,
 $B = \{x | \log_2 x < 0\} = \{x | 0 < x < 1\}$,
 $\complement_A B = \{x | x \geq 1\}$.
 故选D.

【标注】 【知识点】 解指数不等式；解对数不等式；补集；交、并、补集混合运算

二、 简易逻辑

1. 真题分析

 解不等式

18. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $a^2 > a$,

$$\therefore a^2 - a > 0, a(a-1) > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a > 0 \\ a > 1 \end{cases},$$

$$\therefore a > 1.$$

$$\text{或 } \begin{cases} a < 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a < 0 \\ a < 1 \end{cases},$$

$$\therefore a < 0.$$

$$\therefore a < 0 \text{ 或 } a > 1.$$

$$\therefore a > 1 \xrightarrow[\nRightarrow]{\Rightarrow} a < 0 \text{ 或 } a > 1.$$

$\therefore$ “ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的充分不必要条件 .

故选A .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

19. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 不等式 $2x^2 + x - 1 > 0$ 的解集为 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$,

所以“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”成立的充分不必要条件 .

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 一元二次不等式

【知识点】 充要条件与不等式结合

20.

设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | x(x - 2) > 0\}$, 则“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 $\because A = \{x \in \mathbf{R} | x - 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}$,
 $\therefore A \cup B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$,
又 $\because C = \{x \in \mathbf{R} | x(x - 2) > 0\} = \{x \in \mathbf{R} | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$,
 $\therefore A \cup B = C$, 即“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的充分必要条件.

【标注】【知识点】一元二次不等式

【知识点】子集

【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

21. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $2 - x \geq 0$ ”是“ $|x - 1| \leq 1$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 $2 - x \geq 0$, 则 $x \leq 2$,
 $|x - 1| \leq 1$, 则 $-1 \leq x - 1 \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$,
据此可知: “ $2 - x \geq 0$ ”是“ $|x - 1| \leq 1$ ”的必要而不充分条件.
本题选择B选项.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

22. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 解不等式 $|x-2| < 1$ 得 $1 < x < 3$,

设集合 $A = \{x|1 < x < 2\}$, $B = \{x|1 < x < 3\}$.

充分性: 当 $1 < x < 2$ 时, 因为 $A \subset B$, 故充分性成立.

必要性: 因为 $1 < x < 3$ 时不一定有 $1 < x < 2$, 故必要性不成立,

综上“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x-2| < 1$ ”的充分而不必要条件,

故选A.

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 含绝对值的不等式

【知识点】 充要条件与不等式结合

23. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $x^2 - 5x < 0$, 可得 $0 < x < 5$,

由 $|x-1| < 1$, 可得 $0 < x < 2$,

故“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的必要不充分条件.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合; 含绝对值的不等式

24. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x-2| < 1$ ”是“ $x^2 + x - 2 > 0$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 由 $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$,

由 $x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ 或 $x < -2$,

而 $1 < x < 3 \Rightarrow x > 1$ 或 $x < -2$,

所以“ $|x-2| < 1$ ”是“ $x^2 + x - 2 > 0$ ”的充分不必要条件.

故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

25. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 “ $x^3 < 1$ ” 的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 得 $0 < x < 1$, 所以 $0 < x^3 < 1$;

由 $x^3 < 1$, 得 $x < 1$, 不能推出 $0 < x < 1$,

所以 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 “ $x^3 < 1$ ” 的充分而不必要条件.

故选A.

【标注】【知识点】幂函数的图象及性质

【知识点】含绝对值的不等式

【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

26. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^3 > 8$ ” 是 “ $|x| > 2$ ” 的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】若 $x^3 > 8$, 则 $x > 2$, 故有 $|x| > 2$; 但若 $|x| > 2$, 则 $x > 2$ 或 $x < -2$, 于是 $x^3 > 8$ 或 $x^3 < 8$, 故 “ $x^3 > 8$ ” 是 “ $|x| > 2$ ” 的充分而不必要条件.

故选A.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

27. 设 $\theta \in \mathbf{R}$, 则 $\left|\theta - \frac{\pi}{12}\right| < \frac{\pi}{12}$ 是 “ $\sin \theta < \frac{1}{2}$ ” 的 () .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta < \frac{1}{2}$ ，但 $\theta = 0$ ， $\sin \theta < \frac{1}{2}$ ，不满足 $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12}$ ，
所以是充分而不必要条件，故选A。

【标注】【知识点】充要条件与三角函数结合

【知识点】正弦函数的图象和性质

【素养】逻辑推理

不等式性质

28. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则“ $(a-b) \cdot a^2 < 0$ ”是“ $a < b$ ”的（ ）。

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】若 $(a-b) \cdot a^2 < 0$ ，则 $a \neq 0$ ，且 $a < b$ ，所以充分性成立；若 $a < b$ ，则 $a-b < 0$ ，当 $a=0$ 时， $(a-b) \cdot a^2 = 0$ ，所以必要性不成立。所以“ $(a-b) \cdot a^2 < 0$ ”是“ $a < b$ ”的充分而不必要条件。

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

29. 设 $x > 0, y \in \mathbf{R}$ ，则“ $x > y$ ”是“ $x > |y|$ ”的（ ）。

A. 充要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】若 $x=1, y=-2$ ，满足 $x > y$ ，但 $x > |y|$ 不成立；
若 $x > 0, x > |y|$ ，则必有 $x > y$ 。
所以“ $x > y$ ”是“ $x > |y|$ ”的必要不充分条件。

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

【素养】逻辑推理

30. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 若 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$, 则 $x^2 \geq 4, y^2 \geq 4$, 所以 $x^2 + y^2 \geq 8$, 即 $x^2 + y^2 \geq 4$;

若 $x^2 + y^2 \geq 4$, 则 $(-2, -2)$ 满足条件, 但不满足 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$.

所以“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的充分而不必要条件.

故选A.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

数列

31. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列, 公比为 q , 则“ $q < 0$ ”是“对任意的正整数 $n, a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ”的() .

- A. 充要条件
B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-1}(1 + q) = a_1 q^{2n-2}(1 + q) < 0$

$\Leftrightarrow q < -1 \Rightarrow q < 0$,

故必要性成立;

而 $q < 0 \nRightarrow q < -1$, 故充分性不成立.

故选C.

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 充要条件与其他知识点结合

【知识点】 等比数列的概念与通项公式

函数性质

32. 设 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则“ $\varphi = 0$ ”是“ $f(x) = \cos(x + \varphi)(x \in \mathbf{R})$ 为偶函数”的() .

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because \varphi = 0 \Rightarrow f(x) = \cos(x + \varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数，反之不成立，
 $\therefore \varphi = 0$ 是 “ $f(x) = \cos(x + \varphi) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数” 的充分而不必要条件。

【标注】 【知识点】 充要条件与三角函数结合；已知余弦型函数性质求解析式

33. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 “ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的 ()。

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 设 $f(x) = x|x|$ ，则 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，“ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的充要条件。

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

🔔 命题否定

34. 已知命题 $p: \forall x > 0$ ，总有 $(x+1)e^x > 1$ ，则 $\neg p$ 为 ()。

- A. $\exists x_0 \leq 0$ ，使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$
B. $\exists x_0 > 0$ ，使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$
C. $\forall x > 0$ ，总有 $(x+1)e^x \leq 1$
D. $\forall x \leq 0$ ，总有 $(x+1)e^x \leq 1$

【答案】 B

【解析】 全称命题的否定把全称量词变成存在量词，同时否定结论，故命题 $p: \forall x > 0$ ，总有 $(x+1)e^x > 1$ 的否定为 $\neg p: \exists x_0 > 0$ ，使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$ 。
故选 B。

【标注】 【知识点】 全称量词与存在量词

2. 模拟演练

35. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则 “ $x^3 < 27$ ” 是 “ $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ ” 的 ()。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $x^3 < 27$ 得 $x < 3$ ，由 $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ 得 $0 < x < 3$ ，则“ $x^3 < 27$ ”是“ $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ ”的必要不充分条件。

故选B。

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

36. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $|x| + |x - 2| < 4$ ”是“ $x^2 - x - 6 < 0$ ”的（ ）。

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 当 $x \geq 2$ 时， $|x| + |x - 2| < 4 \Rightarrow x < 3$ ，

此时 $2 \leq x < 3$ ，

当 $0 < x < 2$ ， $|x| + |x - 2| < 4 \Rightarrow 2 < x < 4$ ，

此时 $0 < x < 2$ ，

当 $x \leq 0$ ， $|x| + |x - 2| < 4 \Rightarrow x > -1$ ，

此时 $-1 < x \leq 0$ ，综上 $-1 < x < 3$ ，

由 $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow -2 < x < 3$ ，

即“ $|x| + |x - 2| < 4$ ”是“ $x^2 - x - 6 < 0$ ”充分不必要条件。

故选A。

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

37. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的（ ）。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 当 $a > 0$ ， $b > 0$ 时， $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，

则当 $a + b \leq 4$ 时，有 $2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 4$ ，解得 $ab \leq 4$ ，充分性成立；

当 $a = 1, b = 4$ 时, 满足 $ab \leq 4$, 但此时 $a + b = 5$, 必要性不成立,
综上所述, “ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的充分不必要条件.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合; 利用基本不等式求最值; 基本不等式的概念

38. 设 $\{a_n\}$ 是首项大于零的等比数列, 则“ $a_1^2 < a_2^2$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要必要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 设公比为 q ,

若 $a_1^2 < a_2^2$, 则 $a_1^2 < a_1^2 q^2$,

即 $q > 1$,

则 $q > 1$ 或 $q < -1$,

当 $q < -1$ 时, 数列为摆动数列,

则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列不成立,

即充分性不成立,

若数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,

则 $a_1 < a_2$,

$\because a_1 > 0$,

$\therefore a_2 > 0$,

则“ $a_1^2 < a_2^2$ ”成立,

即必要性成立,

则“ $a_1^2 < a_2^2$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的必要不充分条件.

故选B.

【标注】【知识点】数列单调性问题; 充要条件与数列结合

39. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, m, p, q 为正整数, 则“ $p + q = 2m$ ”是“ $a_p + a_q = 2a_m$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】 由等差数列等差中项的定义可得,

“ $p+q=2m$ ”是“ $a_p+a_q=2a_m$ ”的充要条件.

故选C.

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

40. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $ab=0$ ”是“函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数”的().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $ab=0 \Rightarrow a, b$ 中至少有一个为零;

由函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数,

$$\Rightarrow f(-x)=-f(x) \Rightarrow -x|-x+a|+b=-x|x+a|-b \Rightarrow x|x-a|-b=x|x+a|+b \Rightarrow a=b=0$$

, 显然由 a, b 中至少有一个为零, 不一定能推出 $a=b=0$,

但由 $a=b=0$, 一定能推出 $ab=0$,

故“ $ab=0$ ”是“函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数”的必要不充分条件.

故选B.

【标注】【知识点】充要条件与函数结合

41. 设 $p: f(x)=x^3+2x^2+mx+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增, $q: m > \frac{4}{3}$, 则 p 是 q 的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 对函数求导可得, $f'(x)=3x^2+4x+m$,

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增,

则 $f'(x) \geq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立.

即 $3x^2+4x+m \geq 0$ 恒成立,

从而 $\Delta = 16 - 12m \leq 0$,

$$\therefore m \geq \frac{4}{3},$$

$$\text{当 } q: m > \frac{4}{3} \Rightarrow f'(x) > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增,

故选: B.

【标注】【知识点】充要条件与函数结合

三、复数

1. 真题分析

乘法运算

42. i 是虚数单位，复数 $(3+i)(1-2i)=$ _____.

【答案】 $5-5i$

【标注】【知识点】复数的乘法和除法

除法运算

43. i 是虚数单位，复数 $\frac{8-i}{2+i}=$ _____.

【答案】 $3-2i$

【解析】 $\frac{8-i}{2+i} = \frac{(8-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{16-10i+i^2}{2^2-i^2} = \frac{16-10i+(-1)}{4-(-1)} = \frac{15-10i}{5} = 3-2i.$

【标注】【知识点】复数的加法和减法；复数的乘法和除法；复数的四则运算综合

44. i 是虚数单位，复数 $\frac{6+7i}{1+2i}=$ _____.

【答案】 $4-i$

【解析】 $\frac{6+7i}{1+2i} = \frac{(6+7i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)},$
 $= \frac{6-12i+7i+14}{1+4},$
 $= \frac{20-5i}{5},$
 $= 4-i.$

【标注】【知识点】复数的乘法和除法

45. i 是虚数单位，计算 $\frac{1-2i}{2+i}$ 的结果为_____.

【答案】 $-i$

【解析】 $\frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-2-4i-i}{5} = -i$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

46. i 是虚数单位, 复数 $\frac{7+i}{3+4i} = (\quad)$.

A. $1-i$

B. $-1+i$

C. $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$

D. $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

【答案】 A

【解析】 $\frac{7+i}{3+4i} = \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{25-25i}{25} = 1-i$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

47. i 是虚数单位, 复数 $\frac{5+3i}{4-i} = (\quad)$.

A. $1-i$

B. $-1+i$

C. $1+i$

D. $-1-i$

【答案】 C

【解析】 复数 $\frac{5+3i}{4-i} = \frac{(5+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{17+17i}{17} = 1+i$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

48. i 是虚数单位, 复数 $\frac{7-i}{3+i} = (\quad)$.

A. $2+i$

B. $2-i$

C. $-2+i$

D. $-2-i$

【答案】 B

【解析】 复数 $z = \frac{7-i}{3+i} = \frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21-7i-3i-1}{10} = 2-i$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

49. i 是虚数单位, 复数 $\frac{1-3i}{1-i} = (\quad)$.

A. $2+i$

B. $2-i$

C. $-1+2i$

D. $-1-2i$

【答案】 B

【解析】 $\frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i.$

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

模长

50. i 是虚数单位, 则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为 _____ .

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】 由题意, 可知:

$$\frac{5-i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5-6i-i^2}{1-i^2} = 2-3i,$$
$$\therefore \left| \frac{5-i}{1+i} \right| = |2-3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

【标注】 【知识点】 复数的模; 复数的乘法和除法

实部

51. i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+i)z=2$, 则 z 的实部为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because z = \frac{2}{1+i} = 1-i,$
 $\therefore z$ 的实部为1.

【标注】 【知识点】 复数的四则运算综合; 实部与虚部

【素养】 数学运算

复数相等充要条件

52. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $(a+i)(1+i)=bi$, 则 $a+bi=$ _____ .

【答案】 $1+2i$

【解析】

$$(a+i)(1+i) = bi, a-1+(a+1)i = bi, \begin{cases} a-1=0 \\ a+1=b \end{cases}, \text{所以 } a=1, b=2, \text{故答案为 } 1+2i.$$

【标注】【知识点】复数的乘法和除法

【知识点】复数相等

【素养】数学运算

53. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $(1+i)(1-bi) = a$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____.

【答案】2

【解析】 $(1+i)(1-bi) = a, 1+b+i-bi = a, \therefore 1+b = a$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}, \frac{a}{b} = 2.$$

【标注】【知识点】复数的四则运算综合

复数为实数条件

54. 已知 $a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数, 则 a 的值为 _____.

【答案】-2

【解析】 $\frac{a-i}{2+i} = \frac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2a-1)-(a+2)i}{5} = \frac{2a-1}{5} - \frac{a+2}{5}i$ 为实数,
 则 $\frac{a+2}{5} = 0, a = -2$.

【标注】【知识点】复数的基本概念

复数为纯虚数条件

55. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 _____.

【答案】-2

【解析】 $(1-2i)(a+i) = a+2+(1-2a)i,$
 $\therefore (1-2i)(a+i)$ 纯虚数,
 $\therefore a+2=0,$
 $\therefore a=-2,$

故答案为-2 .

【标注】【知识点】实数、虚数、纯虚数

2. 模拟演练

56. 若复数 $z = \frac{3-i}{|2-i|}$, 则 $|z| =$ _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $z = \frac{3-i}{|2-i|} = \frac{3-i}{\sqrt{5}}$,
 $\therefore |z| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】复数的模

57. 设复数 z 满足 $i(z+1) = -3+2i$, 则 $\bar{z} =$ _____ .

【答案】 $1-3i$

【解析】 $\because$ 复数 z 满足 $i(z+1) = -3+2i$,
 $\therefore -i \cdot i \cdot (z+1) = -i(-3+2i)$,
化为 $z+1 = 2+3i$,
化为 $z = 1+3i$,
 $\therefore \bar{z} = 1-3i$.
故答案为： $1-3i$.

【标注】【知识点】共轭复数

四、统计

1. 真题分析

分层抽样

58. 某地区有小学150所, 中学75所, 大学25所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取30所学校对学生视力调查, 应从小学中抽取 _____ 所学校, 中学中抽取 _____ 所学校.

【答案】 18 ; 9

【解析】 因为分层抽样也叫按比例抽样，
由题知学校总数为250所，
所以应从小学中抽取 $\frac{150}{250} \times 30 = 18$ ，
中学中抽取 $\frac{75}{250} \times 30 = 9$ 。

【标注】 【知识点】 分层随机抽样

【素养】 数据分析

【素养】 数学运算

59. 一支田径队有男运动员48人，女运动员36人，若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为21的样本，则抽取男运动员的人数为_____。

【答案】 12

【解析】 设抽取男运动员人数为 n ，
则 $\frac{n}{48} = \frac{21}{48 + 36}$ ，解之得 $n = 12$ 。

【标注】 【素养】 数据分析

【素养】 数学运算

【知识点】 总体、样本、样本容量

【知识点】 分层随机抽样

60. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法，从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查。已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为4 : 5 : 5 : 6，则应从一年级本科生中抽取 _____ 名学生。

【答案】 60

【解析】 根据分层抽样的定义和方法，一年级本科生人数所占的比例为 $\frac{4}{4 + 5 + 5 + 6} = \frac{1}{5}$ ，
故应从一年级本科生中抽取名学生数为 $300 \times \frac{1}{5} = 60$ ，
故答案为：60。

【标注】 【素养】 数据分析

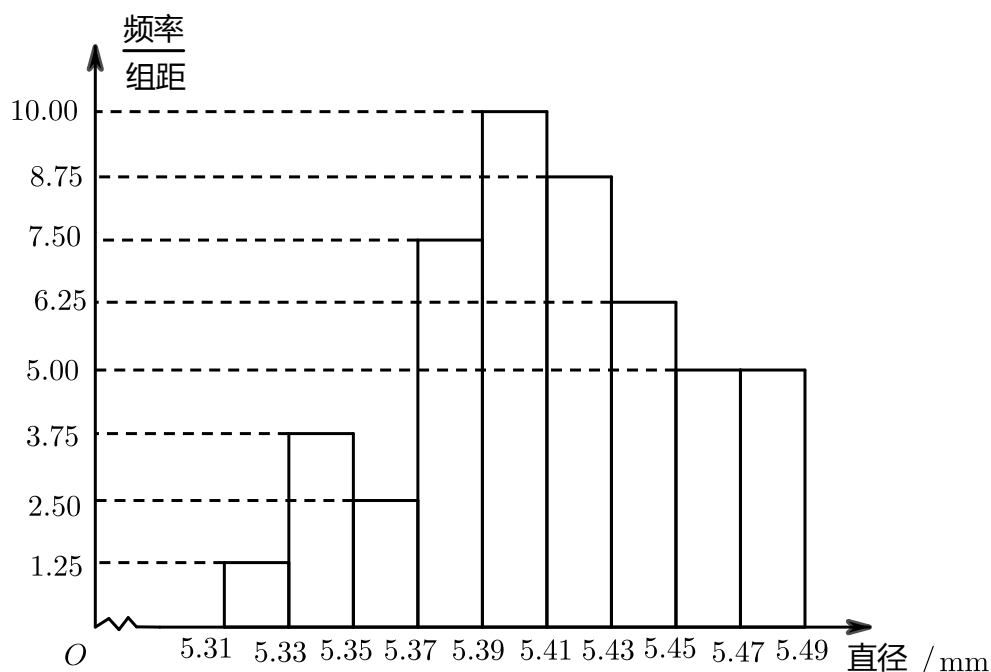
【素养】 数学运算

【知识点】总体、样本、样本容量

【知识点】分层随机抽样

频率分布直方图

61. 从一批零件中抽取80个，测量其直径（单位mm），将所得数据分为9组： $[5.31, 5.33)$ ， $[5.33, 5.35)$ ， $\dots$ ， $[5.45, 5.47)$ ， $[5.47, 5.49)$ 。并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的个数为（ ）。



A. 10

B. 18

C. 20

D. 36

【答案】B

【解析】组距为 $5.45 - 5.43 = 0.02$ ，

直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的频率为 $(6.25 + 5) \times 0.02 = 0.225$ ，

$0.225 \times 80 = 18$ 。

故选B。

【标注】【知识点】频率分布直方图；频率与概率问题

2. 模拟演练

62. 一组样本数据的频率分布直方图如图所示，试估计此样本数据的中位数为_____。

众数为： $\frac{2+2.5}{2} = 2.25$.

故选：C .

【标注】【知识点】众数、中位数、平均数；用样本的数字特征估计总体的数字特征问题