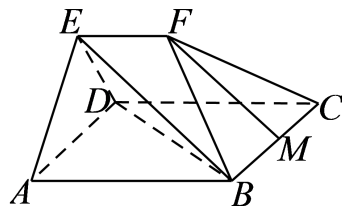


第二讲-空间向量的应用练习题

一、 角度计算

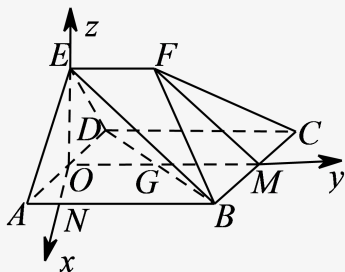
1. 已知：平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{2}$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle AED$ 为等边三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF = \sqrt{2}$ ， M 为线段 BC 的中点。



求直线 BF 与平面 BED 所成角的正弦值。

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

【解析】 (1) 过 O 作 $ON \perp AB$ ，垂足为 N ，则 $ON \perp OM$ ，
以 O 为原点，以 ON ， OM ， OE 为坐标轴建立空间直角坐标系，
如图所示：



$$\begin{aligned} & \text{则 } E(0, 0, \sqrt{3}), M(0, 2\sqrt{2}, 0), G(0, \sqrt{2}, 0), \\ & B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right), F(0, \sqrt{2}, \sqrt{3}), \\ & \therefore \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right), \overrightarrow{GE} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{3}), \\ & \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{GE} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -\sqrt{2}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } y_1 = \sqrt{3} \text{ 得 } \vec{m} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2}),$$

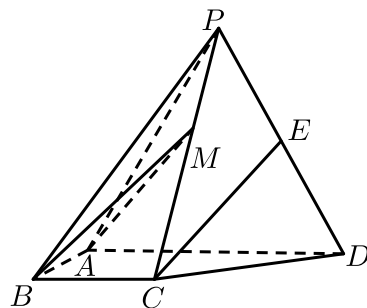
$$\therefore \cos \langle \vec{BF}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{BF} \cdot \vec{m}}{|\vec{BF}| |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{6}}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{设直线 } BF \text{ 与平面 } BED \text{ 所成角为 } \alpha, \text{ 则 } \sin \alpha = \left| \cos \langle \vec{BF}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore \text{直线 } BF \text{ 与平面 } BED \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题

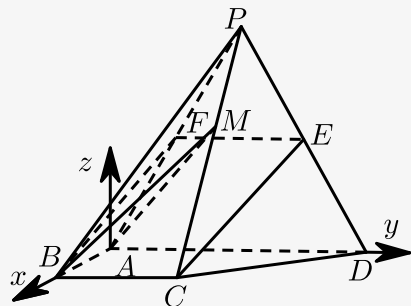
2. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$ ， $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ ， $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。



点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° ，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值。

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】 (1) 方法一：以 A 为原点， $\vec{AB}$ 为 x 轴正方向，建立如图坐标系，设 $AB = 1$ ，



$$\text{则 } A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), P(0,1,\sqrt{3}),$$

$$\therefore \vec{PC} = (1,0,-\sqrt{3}), \vec{AB} = (1,0,0),$$

$$\text{设 } M(x,y,z), \text{ 且 } 0 < x < 1,$$

$$\text{则 } \vec{BM} = (x-1,y,z), \vec{PM} = (x,y-1,z-\sqrt{3}),$$

$$\therefore BM \text{ 与底面 } ABCD \text{ 所成角为 } 45^\circ,$$

而 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 为底面法向量,

$$\therefore |\cos \langle \vec{BM}, \vec{n} \rangle| = \sin 45^\circ = \frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } (x-1)^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ ①},$$

又 $\because M$ 在 PC 上, 设 $\vec{PM} = \lambda \vec{PC}$,

$$\text{则 } x = \lambda, y = 1, z = \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda \text{ ②},$$

$$\text{由 ①② 可得 } \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 1 \\ z = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore M \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2} \right),$$

$$\therefore \vec{AM} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2} \right),$$

设 $\vec{m}$ 为平面 ABM 的法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{2})x_0 + 2y_0 + \sqrt{6}z_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{取 } \vec{m} = (0, -\sqrt{6}, 2),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\therefore \text{余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

方法二: 四棱锥 $P-ABCD$ 中,

侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$,

$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.

取 AD 的中点 O , M 在底面 $ABCD$ 上的射影 N 在 OC 上, 设 $AD = 2$,

则 $AB = BC = 1$, $OP = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle PCO = 60^\circ$, 直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° ,

$$\text{可得: } BN = MN, CN = \frac{\sqrt{3}}{3}MN, BC = 1,$$

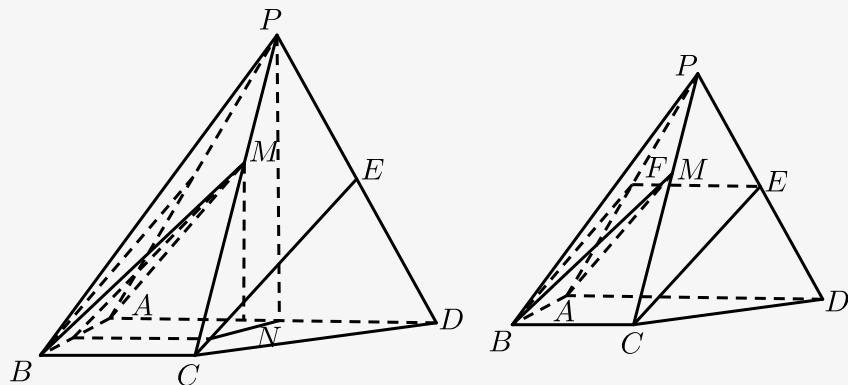
$$\text{可得: } 1 + \frac{1}{3}BN^2 = BN^2, BN = \frac{\sqrt{6}}{2}, MN = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

作 $NQ \perp AB$ 于 Q , 连接 MQ , $AB \perp MN$,

所以 $\angle MQN$ 就是二面角 $M-AB-D$ 的平面角,

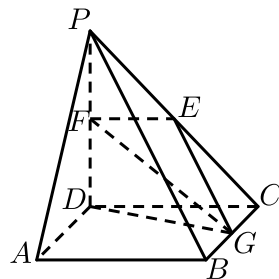
$$MQ = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\text{二面角 } M-AB-D \text{ 的余弦值为: } \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

3. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AB = 2$ ，点 E 、 F 、 G 分别为 PC 、 PD 、 BC 的中点。



求二面角 $D-FG-E$ 的余弦值。

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

【解析】 (1) $\because \overrightarrow{DF} = (0, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{EF} = (0, -1, 0)$ ， $\overrightarrow{FG} = (1, 2, -1)$ ，

设面 DFG 法向量为 $\vec{m}(x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{FG} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{m} = (-2, 1, 0),$$

设面 EFG 法向量 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 0, 1),$$

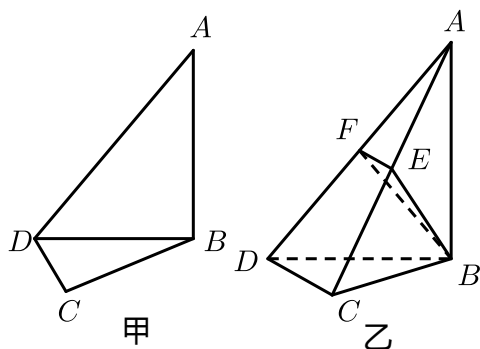
$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

又 $\because$ 二面角 $D-FG-E$ 为钝角，

$$\therefore \text{余弦值为} -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题

4. 如图甲，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 105^\circ$ ， $AB = BD$ ，现将四边形 $ABCD$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BDC （如图乙），设点 E 、 F 分别为棱 AC 、 AD 的中点。



- (1) 求 BF 与平面 ABC 所成角的正弦。
 (2) 求二面角 $B - EF - A$ 的余弦。

【答案】 (1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
 (2) $-\frac{1}{7}$.

【解析】 (1) 解法1： $\because E$ 、 F 分别为 AC 、 AD 的中点；

$\therefore EF \parallel CD$ ，又由(1)知， $DC \perp$ 平面 ABC ，

$\therefore EF \perp$ 平面 ABC ，垂足为点 E ；

$\therefore \angle FBE$ 是 BF 与平面 ABC 所成的角；

在图甲中， $\because \angle ADC = 105^\circ$ ， $\therefore \angle BDC = 60^\circ$ ， $\angle DBC = 30^\circ$.

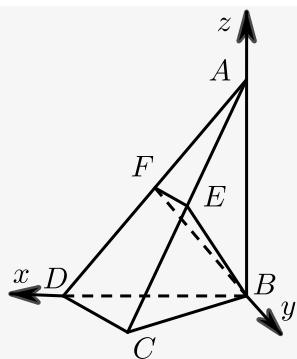
设 $CD = a$ 则 $BD = 2a$ ， $BC = \sqrt{3}a$ ， $BF = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \sqrt{2}a$ ，

$EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle FEB$ 中， $\sin \angle FBE = \frac{EF}{FB} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

即 BF 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解法2：如图，以 B 为坐标原点， BD 所在的直线为 x 轴建立空间直角坐标系如下图所示，



设 $CD = a$, 则 $BD = AB = 2a$, $BC = \sqrt{3}a$, $BD = \sqrt{3}a$, $AD = 2\sqrt{2}a$;

可得 $B(0, 0, 0)$, $D(2a, 0, 0)$, $A(0, 0, 2a)$, $C\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$, $F(a, 0, a)$,

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right) , \overrightarrow{BF} = (a, 0, a) ;$$

设 BF 与平面 ABC 所成的角为 θ ;

由 (1) 知 $DC \perp$ 平面 ABC ;

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{BF}|} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4} ;$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4} ;$$

(2) 由 (2) 知 $FE \perp$ 平面 ABC ,

又 $\because BE \subset$ 平面 ABC , $AE \subset$ 平面 ABC , $\therefore FE \perp BE$, $FE \perp AE$,

$\therefore \angle AEB$ 为二面角 $B - EF - A$ 的平面角 ;

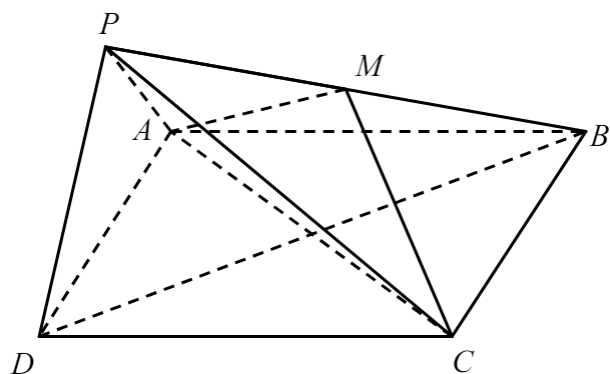
$$\text{在 } \triangle AEB \text{ 中 , } AE = BE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a ;$$

$$\therefore \cos \angle AEB = \frac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2AE \cdot BE} = -\frac{1}{7} ;$$

即所求二面角 $B - EF - A$ 的余弦为 $-\frac{1}{7}$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

5. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 M 在线段 PB 上， $PD \parallel$ 平面 MAC ， $PA = PD = \sqrt{6}$ ， $AB = 4$.



- (1) 求二面角 $B - PD - A$ 的大小.
- (2) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值 .

【答案】 (1) 60° .

(2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

【解析】 (1) 取 AD 中点为 O , BC 中点为 E , 连结 OP , OE

$$\because PA = PD, \therefore PO \perp AD$$

又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$

$$\text{面 } PAD \cap \text{面 } ABCD = AD$$

$$\therefore PO \perp \text{面 } ABCD$$

以 OD 为 x 轴 , OE 为 y 轴 , OP 为 z 轴建立空间直角坐标系

$$\text{可知 } D(2, 0, 0), A(-2, 0, 0), B(-2, 4, 0), P(0, 0, \sqrt{2})$$

易知面 PAD 的法向量为 $\vec{m} = (0, 1, 0)$

$$\text{且 } \vec{PD} = (2, 0, -\sqrt{2}), \vec{PB} = (-2, 4, -\sqrt{2})$$

设面 PBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

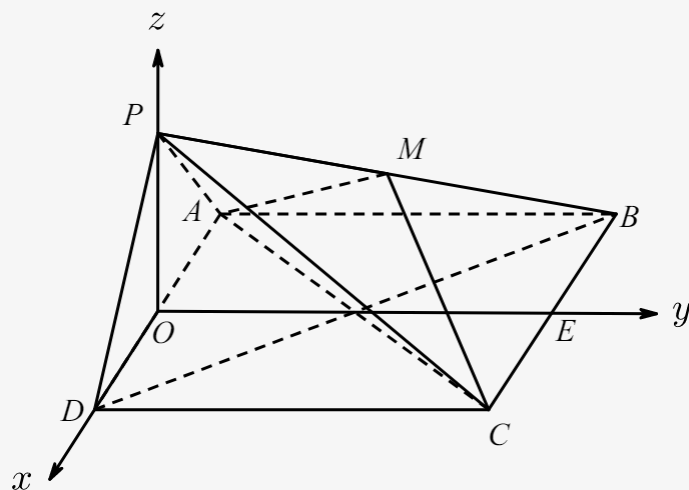
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{2}z = 0 \\ -2x + 4y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{可知 } \vec{n} = (1, 1, \sqrt{2})$$

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{1}{\sqrt{1^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} \right| = \frac{1}{2}$$

由图可知二面角的平面角为锐角

$$\therefore \text{二面角 } B - PD - A \text{ 大小为 } 60^\circ$$



(2) 点 $M(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(2, 4, 0)$

$$\therefore \overrightarrow{MC} = (3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

由 (1) 知, 平面 BDP 的一个法向量 $\vec{n} = (1, 1, \sqrt{2})$

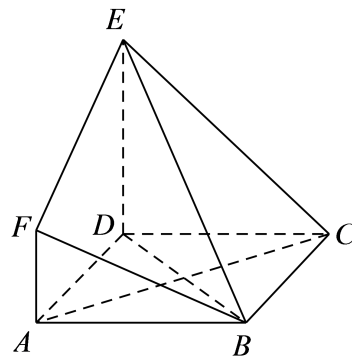
设 MC 与平面 BDP 所成角为 θ

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{MC}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{3 + 2 - 1}{\sqrt{9 + 4 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2}} \right| = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

【标注】【知识点】 向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；直线和平面平行的判定；平行的探索性问题

二、动点问题

6. 如图, $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$, 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° .



设点 M 是线段 BD 上一动点, 试确定点 M 的位置, 使得 $AM \parallel$ 平面 BEF , 并证明你的结论.

【答案】 (1) M 是 BD 的一个三等分点, 即 $3BM = BD$, 证明见解析.

【解析】 (1) 证明: 当 M 是 BD 的一个三等分点, 即 $3BM = BD$ 时,

$AM // \text{面} BEF$.

取 BE 上的三等分点 N , 使 $3BN = BE$,

连接 MN, NF , 则 $DE // MN$, 且 $DE = 3MN$,

$\therefore AF // DE$, 且 $DE = 3AF$,

$\therefore AF // MN$, 且 $AF = MN$.

故四边形 $AMNF$ 是平行四边形.

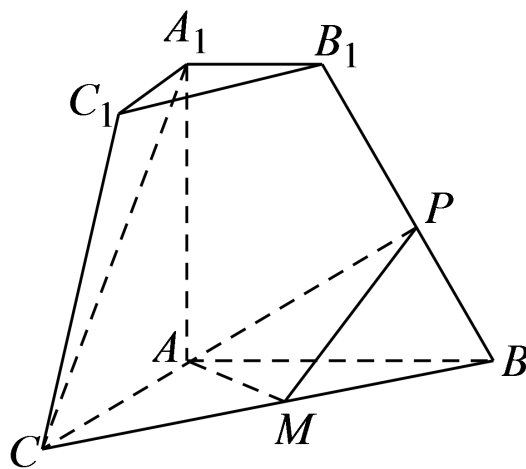
$\therefore AM // FN$.

$\because AM \not\subset \text{面} BEF, FN \subset \text{面} BEF$,

$\therefore AM // \text{面} BEF$.

【标注】 【知识点】向量法解决二面角问题; 线面平行的证明问题; 直线和平面平行的判定; 直线和平面垂直的判定; 线面垂直的证明问题

7. 如图, 在直角梯形 AA_1B_1B 中, $\angle A_1AB = 90^\circ$, $A_1B_1 // AB$, $AB = AA_1 = 2A_1B_1 = 2$, 直角梯形 AA_1C_1C 通过直角梯形 AA_1B_1B 以直线 AA_1 为轴旋转得到, 且使得平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 AA_1B_1B . M 为线段 BC 的中点, P 为线段 BB_1 上的动点.



是否存在点 P , 使得直线 $A_1C // \text{平面} AMP$? 如果存在,

求出 $\frac{BP}{PB_1}$ 的值, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 所以在线段 BB_1 上存在点 P , 且 $\frac{BP}{PB_1} = 2$ 时, 使得直线 $A_1C // \text{平面} AMP$.

【解析】 (1) 存在点 P , 使得直线 $A_1C // \text{平面} AMP$.

设 $P(x_1, y_1, z_1)$, 且 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 则 $(x_1, y_1 - 2, z_1) = \lambda(0, -1, 2)$,

所以 $x_1 = 0, y_1 = 2 - \lambda, z_1 = 2\lambda$. 所以 $\overrightarrow{AP} = (0, 2 - \lambda, 2\lambda)$.

设平面 AMP 的一个法向量为 $n_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} n_0 \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ n_0 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_0 + y_0 = 0, \\ (2 - \lambda)y_0 + 2\lambda z_0 = 0. \end{cases}$$

取 $y_0 = 1$, 得 $n_0 = (-1, 1, \frac{\lambda - 2}{2\lambda})$ (显然 $\lambda = 0$ 不符合题意).

又 $\overrightarrow{A_1C} = (2, 0, -2)$,

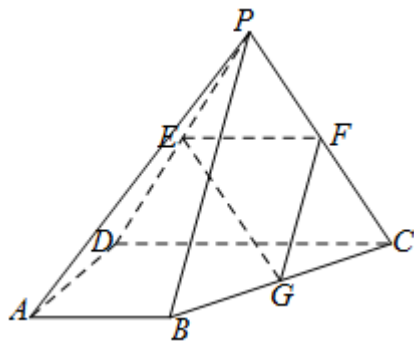
若 $A_1C \parallel$ 平面 AMP , 则 $\overrightarrow{A_1C} \perp n_0$.

所以 $\overrightarrow{A_1C} \cdot n_0 = -2 - \frac{\lambda - 2}{\lambda} = 0$. 所以 $\lambda = \frac{2}{3}$.

所以在线段 BB_1 上存在点 P , 且 $\frac{BP}{PB_1} = 2$ 时, 使得直线 $A_1C \parallel$ 平面 AMP .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线线垂直的证明问题；直线和平面垂直的性质

8. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, 侧面 $PDC \perp$ 底面 $ABCD$, $\triangle PDC$ 是等边三角形, $AB = AD = \frac{1}{2}CD = 1$, 点 E, F, G 分别是棱 PD, PC, BC 的中点.



在线段 PB 上存在一点 Q , 使 $PC \perp$ 平面 ADQ , 且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 求 λ 的值.

【答案】 (1) $\lambda = \frac{2}{3}$.

【解析】 (1) $P(0, 1, \sqrt{3})$, $B(1, 1, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, 设 $Q(x, y, z)$,

$$\overrightarrow{PC} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x, y - 1, z - \sqrt{3}) = \lambda(1, 0, -\sqrt{3}) = (\lambda, 0, -\sqrt{3}\lambda),$$

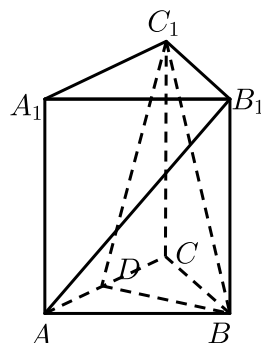
$$\therefore Q(\lambda, 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{AQ} = (\lambda - 1, -1, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}),$$

$$\because PC \perp \text{平面 } ADQ, \therefore PC \perp AQ,$$

$$\therefore -1 + 3 - 3\lambda = 0, \lambda = \frac{2}{3}.$$

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

9. 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $A_1A \perp$ 平面 ABC ， $BC \perp AC$ ， $BC = AC = 1$ ， D 为 AC 的中点。



若点 P 在线段 AB_1 上，且 $CP \perp$ 平面 BDC_1 ，确定点 P 的位置并求线段 AA_1 的长。

【答案】 (1) 点 P 位置是在线段 AB_1 上，且 $AP = \frac{1}{3}AB_1$ 。

【解析】 (1) 设 $AA_1 = a$ ，

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB_1} = \lambda(-1, 1, a) = (-\lambda, \lambda, a\lambda),$$

$$\therefore \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = (1 - \lambda, \lambda, a\lambda),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DC_1} = (-\frac{1}{2}, 0, a),$$

$$\overrightarrow{BD} = (\frac{1}{2}, -1, 0), \quad CP \perp \text{面 } BDC_1,$$

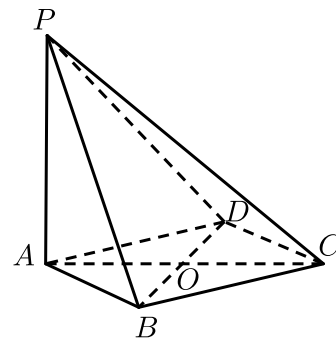
$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DC_1} = -\frac{1}{2}(1 - \lambda) + a^2\lambda = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(1 - \lambda) - \lambda = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = 1, \lambda = \frac{1}{3},$$

$$AA_1 = 1, \text{ 点 } P \text{ 位置是在线段 } AB_1 \text{ 上且 } AP = \frac{1}{3}AB_1.$$

【标注】【知识点】空间向量的数量积及其坐标表示；向量法解决二面角问题；线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

10. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形， $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$



当平面 PBC 和平面 PCD 垂直时，求 PA 的长．

【答案】 (1) $\sqrt{6}$.

【解析】 (1) 由 (2) 得 $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$,

设 $P(0, -\sqrt{3}, t) (t > 0)$ 则 $\overrightarrow{BP} = (-1, -\sqrt{3}, t)$,

设平面 PBC 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{BP} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ -x - \sqrt{3}y + tz = 0 \end{cases}$$

当 $y = \sqrt{3}$ 时, $\vec{m} = \left(3, \sqrt{3}, \frac{6}{t}\right)$,

同理, 平面 PDC 的法向量 $\vec{n} = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{6}{t}\right)$,

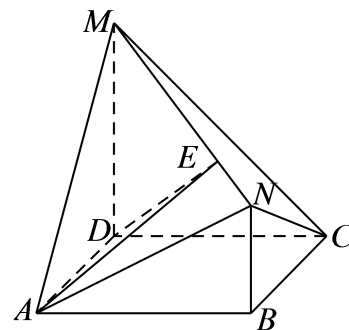
$\because$ 面 $PCB \perp$ 面 PDC ,

$\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $-6 + \frac{36}{t^2} = 0$, 解得 $t = \sqrt{6}$,

$\therefore PA = \sqrt{6}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决异面直线所成角问题；线面垂直的证明问题

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $MD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $NB \parallel MD$ ，且 $NB = 1$ ， $MD = 2$



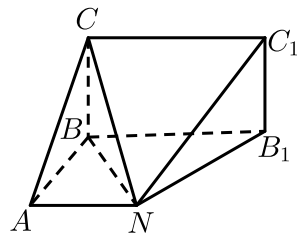
E 为直线 MN 上一点，且平面 $ADE \perp$ 平面 MNC ，求 $\frac{ME}{MN}$ 的值．

【答案】 (1) $\frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}$.

【解析】 (1) 设 $E(x, y, z)$, $\frac{ME}{MN} = \lambda$,
 $\therefore \overrightarrow{ME} = \lambda \overrightarrow{MN}$,
 又 $\because \overrightarrow{ME} = (x, y, z - 2)$, $\overrightarrow{MN} = (2, 2, -1)$,
 $\therefore E$ 点的坐标为 $(2\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda)$, $\because AD \perp$ 面 MDC , $\therefore AD \perp MC$,
 欲使平面 $ADE \perp$ 平面 MNC , 只要 $AE \perp MC$,
 $\therefore \overrightarrow{AE} = (2\lambda - 2, 2\lambda, 2 - \lambda)$, $\overrightarrow{MC} = (0, 2, -2)$,
 $\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, $\therefore 4\lambda - 2(2 - \lambda) = 0$
 $\therefore \lambda = \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{ME}{MN} = \frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决二面角问题

12. 如图：已知矩形 BB_1CC_1 所在平面与底面 ABB_1N 垂直，直角梯形 ABB_1N 中 $AN \parallel BB_1$, $AB \perp AN$, $CB = BA = AN = 2$, $BB_1 = 4$.



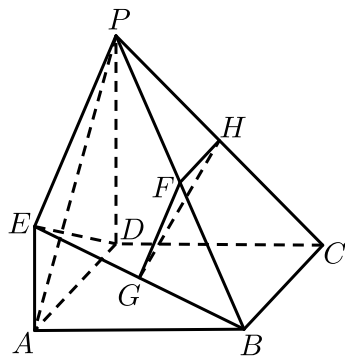
在 BC 边上找一点 P , 使 B_1P 与 CN 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{51}}{51}$, 并求线段 B_1P 的长.

【答案】 (1) $\sqrt{17}$.

【解析】 (1) 设 $P(0, 0, a)$ 为 BC 上一点,
 则 $\overrightarrow{B_1P} = (0, -4, a)$, $\overrightarrow{CN} = (2, 2, -2)$,
 故 $\frac{5\sqrt{51}}{51} = \frac{\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{B_1P}| \cdot |\overrightarrow{CN}|}$, 则 $a^2 - 17a + 16 = 0$,
 解得 $a = 1$, 或 $a = 16$ (舍去),
 所以 $P(0, 0, 1)$, 则线段 B_1P 的长度为 $\sqrt{17}$.

【标注】【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决二面角问题

13. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel PD$, $AD = PD = 2EA = 2$, F, G, H 分别为 PB, EB, PC 的中点.



在线段 PC 上是否存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成的角为 60° ? 若存在, 求出线段 PM 的长; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 存在, $PM = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

【解析】 (1) 假设在线段 PC 上存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° .

依题意可设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$.

由 $\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2)$, 则 $\overrightarrow{PM} = (0, 2\lambda, -2\lambda)$.

又因为 $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{FP} = (-1, -1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{FM} = (-1, 2\lambda - 1, 1 - 2\lambda)$.

因为直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° , $\overrightarrow{PA} = (2, 0, -2)$,

所以 $\left| \cos \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{PA} \rangle \right| = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{|-2 - 2 + 4\lambda|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 2(2\lambda - 1)^2}}$, 解得 $\lambda = \frac{5}{8}$.

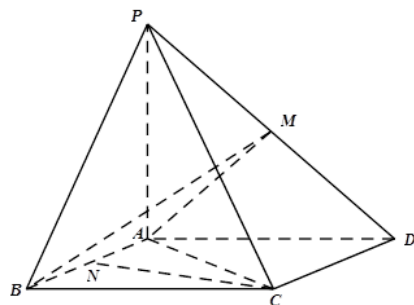
所以 $\overrightarrow{PM} = (0, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$, $|\overrightarrow{PM}| = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

所以在线段 PC 上存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成角为 60° , 此时

$$PM = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题; 直线和平面平行的判定; 向量法解决二面角问题; 向量法解决异面直线所成角问题

14. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, M 是棱 PD 的中点, 且 $PA = AB = AC = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$.



如果 N 是棱 AB 上一点,且直线 CN 与平面 MAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$,求 $\frac{AN}{NB}$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{AN}{NB} = 1$

【解析】 (1) 因为 N 是在棱 AB 上一点,所以设 $N(x, 0, 0)$, $\overrightarrow{NC} = (-x, 2, 0)$.

设直线 CN 与平面 MAB 所成角为 α ,

因为平面 MAB 的法向量 $\vec{n} = (0, 1, -1)$,

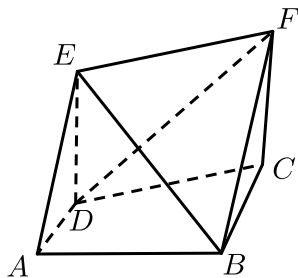
$$\text{所以} \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{NC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{NC}|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

解得 $x = 1$, 即 $AN = 1$, $NB = 1$, 所以 $\frac{AN}{NB} = 1$.

【标注】 【知识点】向量法解决二面角问题; 向量法解决空间中的平行问题; 向量法解决线面角问题

15. 如图所示, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形, $CF = \sqrt{3}$, 平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.



在线段 DF 上是否存在点 P , 使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 若存在, 求出线段 BP 的长, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

【解析】 (1)

$$\text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DF} = \lambda(-1, 2, \sqrt{3}) = (-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \lambda \in [0, 1];$$

$$\therefore P(-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{BP} = (-\lambda - 1, 2\lambda - 2, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\text{又平面 } ABE \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1),$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} \\ &= \frac{|\sqrt{3}(-\lambda - 1) + \sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{化简得 } 8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{4};$$

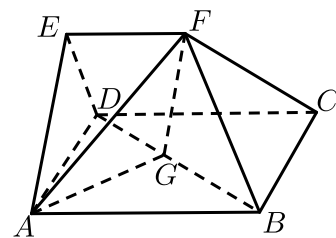
$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \therefore |\overrightarrow{BP}| = 2;$$

$$\text{综上, } |\overrightarrow{BP}| = 2.$$

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法求空间距离

16. 在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $DE = EF = 1$ ， $DC = 2$ ， $\angle EAD = 30^\circ$ 。



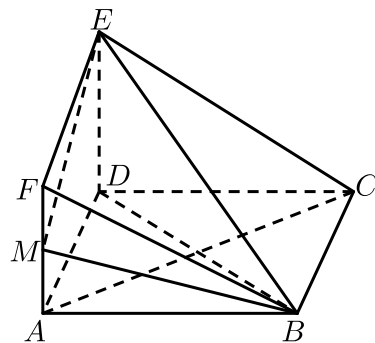
在线段 BD 上是否存在点 G ，使得平面 EAD 与平面 FAG 所成的锐二面角的大小为 30° ，若存在，求出 $\frac{DG}{DB}$ 的值；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) 存在， $\frac{DG}{DB} = \frac{1}{3}$ 。

【解析】 (1) 由 (1) 知平面 $ABCD \perp$ 平面 AED 。

在平面内，过 D 作 AD 的垂线 DH 。

则 $DH \perp$ 平面 $ABCD$ ，以点 D 为坐标原点， DA ， DC ， DH 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系，



在线段 AF 上是否存在点 M ，使得二面角 $M-BE-D$ 的大小为 60° ？若存在，求出 $\frac{AM}{AF}$ 的值；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) 存在， $\frac{AM}{AF} = \frac{1}{4}$ ，理由见解析。

【解析】 (1) 设 $\frac{AM}{AF} = \lambda$ ，

$\therefore M$ 点坐标为 $(3, 0, 2\sqrt{6}\lambda)$ ，

$\therefore$ 面 BED 一个法向量为 $\vec{n}_2(x_0, y_0, z_0)$ ，

$\therefore \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BM} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BE} = 0 \end{cases}$ ， $\therefore \vec{n}_2 = (6 - 4\lambda, 4\lambda, \sqrt{6})$ ，

$\therefore |\cos 60^\circ| = \left| \cos \langle \vec{AC}, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|24\lambda - 18|}{|3\sqrt{2}| |32\lambda^2 - 48\lambda + 42|} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore 16\lambda^2 - 24\lambda + 5 = 0$ 。

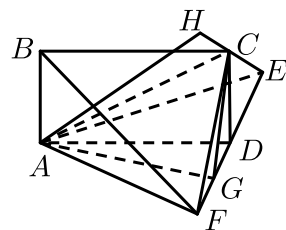
$\therefore \lambda = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{5}{4}$ (舍去)。

$\therefore$ 存在， $\frac{AM}{AF} = \frac{1}{4}$ 。

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决线面角问题；平面和平面垂直的判定；面面垂直的证明问题

三、综合创新

18. 如图，等腰直角三角形 AEF 的斜边 EF 的中点为 D ，四边形 $ABCD$ 为矩形，平面 $ABCD \perp$ 平面 AEF ，点 G 为 DF 的中点， $AD = 2AB = 2$ 。



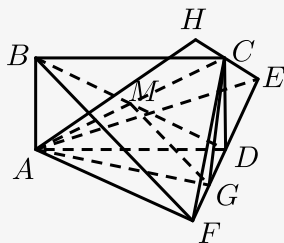
- (1) 证明： $BF \parallel$ 平面 ACG .
- (2) 求二面角 $D - BC - F$ 的正弦值 .
- (3) 点 H 为直线 CE 上的点，且 $\overrightarrow{CE} = -5\overrightarrow{CH}$ ，求直线 AH 和平面 BCF 所成角的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(3) 直线 AH 和平面 BCF 所成角正弦值为 $\frac{3\sqrt{62}}{62}$.

【解析】 (1) 设 $DB \cap AC = M$ ，则 M 为 BD 中点，



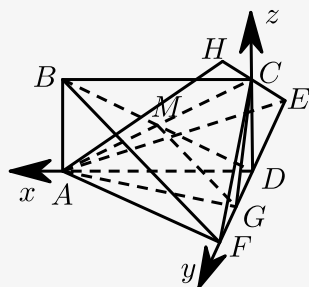
$\because$ 点 G 为 DF 的中点，

$\therefore BF \parallel MG$ ，

且 $MG \subset$ 面 ACG ， $BF \not\subset$ 面 ACG ，

$\therefore BF \parallel$ 平面 ACG .

(2) 以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，



$\because AD = 2AB = 2$ ，等腰三角形 AEF 的斜边 EF 的中点为 D ，

$\therefore EF = 4$ ，

$\therefore D(0, 0, 0)$ ， $A(2, 0, 0)$ ， $B(2, 1, 0)$ ， $C(0, 0, 2)$ ， $F(0, 2, 0)$ ， $E(0, -2, 0)$ ，

$\overrightarrow{FB} = (2, -1, 0)$ ， $\overrightarrow{FC} = (0, -2, 2)$ ，

设面 BCF 法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FB} = 2x - y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{FC} = -2y + 2z = 0 \end{cases}, \text{得 } \vec{n} = (1, 2, 2),$$

$\because$ 平面 $ABCD$ 的法向量 $\overrightarrow{DF} = (0, 2, 0)$ ，

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{DF}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DF} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{DF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{3},$$

二面角 $D-BC-F$ 的正弦值为: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$(3) \therefore \overrightarrow{CE} = -5\overrightarrow{CH},$$

$$\therefore \overrightarrow{EH} = \frac{6}{5}\overrightarrow{EC} = \left(0, \frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right),$$

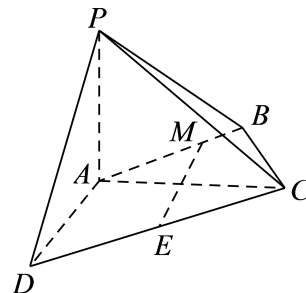
$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \left(-2, \frac{2}{5}, \frac{12}{5}\right),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AH} \rangle = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{62}}{62},$$

$\therefore$ 直线 AH 和平面 BCF 所成角正弦值为 $\frac{3\sqrt{62}}{62}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp AD$, $AB \perp BC$, $\angle BCA = 60^\circ$, $AP = AC = AD = 2$, E 为 CD 的中点, M 在 AB 上, 且 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.



- (1) 求证: $EM \parallel$ 平面 PAD .
 (2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.
 (3) 点 F 是线段 PD 上异于两端点的任意一点, 若满足异面直线 EF 与 AC 所成角 45° , 求 AF 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

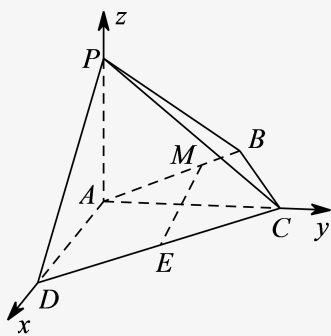
$$(2) \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$(3) |AF| = \sqrt{2}.$$

【解析】 (1) 以 A 为原点, AD 为 x 轴, AC 为 y 轴, AP 为 z 轴, 建立如图的空间直角坐标系,

$$A(0,0,0), D(2,0,0), C(0,2,0), E(1,1,0), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), P(0,0,2),$$

设 $M(x,y,z)$,



$$\therefore \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB},$$

$$\therefore (x, y, z) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - x, \frac{3}{2} - y, -z\right),$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\sqrt{3} - 2x \\ y = 3 - 2y \\ z = -2z \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

$$\therefore M\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{EM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, 0, 0\right), \text{ 平面 } PAD \text{ 的法向量 } \vec{p} = (0, 1, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \cdot \vec{p} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \perp \vec{p},$$

又 $\because EM \not\subset \text{平面 } PAD,$

$\therefore EM // \text{平面 } PAD.$

(2) 设平面 PBC 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z),$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = (0, 2, -2), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} y - z = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = -1,$$

$$\therefore y = \sqrt{3}, z = \sqrt{3}$$

$$\therefore \vec{m} = (-1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

平面 PAD 的法向量 $\vec{p} = (0, 1, 0),$

设二面角所成的锐二面角为 $\theta,$

$$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{p} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{p}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

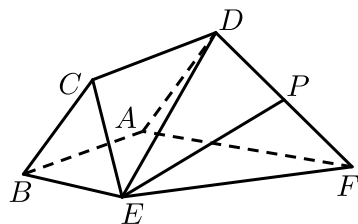
平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}.$

(3) 令 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PD}, (0 < \lambda < 1), \overrightarrow{PF} = \lambda(2, 0, -2),$

$$\begin{aligned}
&\therefore F(2\lambda, 0, 2-2\lambda), \\
&\overrightarrow{EF} = (2\lambda-1, -1, 2-2\lambda), \\
&\therefore |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{2\sqrt{(2\lambda-1)^2 + 1 + (2-2\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore 4\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0, \\
&\therefore \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = 1 \text{ (舍)}, \\
&\therefore F(1, 0, 1), \\
&\therefore |AF| = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】向量法解决异面直线所成角问题；向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题

20. 如图，已知菱形 $ABCD$ 与直角梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，其中 $BE \parallel AF$ ， $AB \perp AF$ ， $AB = BE = \frac{1}{2}AF = 2$ ， $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$ ， P 为 DF 的中点。



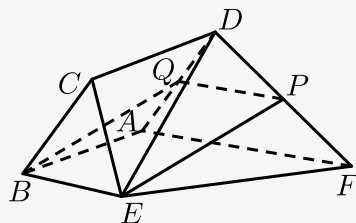
- (1) 求证： $PE \parallel$ 平面 $ABCD$.
 (2) 求二面角 $D-EF-A$ 的余弦值 .
 (3) 设 G 为线段 AD 上一点， $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$ ，若直线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$ ，求 AG 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 (1) 取 AD 中点 Q ，连接 PQ ， BQ ，



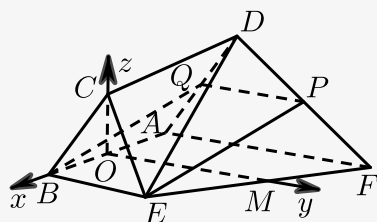
则 $PQ \parallel AF \parallel BE$ ，且 $PQ = \frac{1}{2}AF = BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $BEPQ$ 为平行四边形 ,

$\therefore PE // BQ$,

$\therefore PE // \text{平面 } ABCD$.

(2) 取 AB 中点 O , 连接 CO , $CO \perp AB$,



$\therefore \text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } ABEF$,

$\therefore CO \perp \text{平面 } ABEF$,

作 $OM // AF$, 分别以 OB , OM , OC 所在直线为 x 轴 , y 轴 , z 轴建立空间直角坐标系 ,

$D(-2, 0, \sqrt{3})$, $F(-1, 4, 0)$, $E(1, 2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{DF} = (1, 4, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{EF} = (-2, 2, 0)$,

设平面 DEF 法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} x + 4y - \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} ,$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1$, $z = \frac{5}{\sqrt{3}}$,

平面 AEF 的法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{5\sqrt{31}}{31} .$$

(3) $A(-1, 0, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AG} = (-\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$,

$\therefore G(-\lambda - 1, 0, \sqrt{3}\lambda)$, $\overrightarrow{FG} = (-\lambda, -4, \sqrt{3}\lambda)$,

平面 $ABEF$ 的法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

设直线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角为 θ ,

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{16 + 4\lambda^2}} = \frac{\sqrt{39}}{26} ,$$

$$\therefore \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} , AG = \frac{2\sqrt{3}}{3} .$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定；向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题