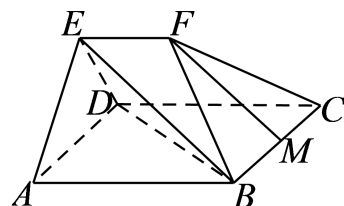


第二讲-空间向量的应用练习题

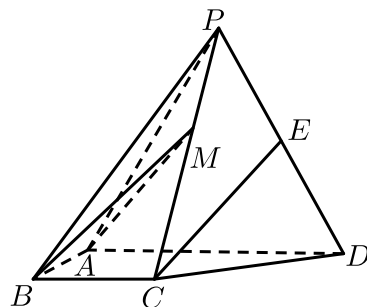
一、 角度计算

1. 已知：平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{2}$ ，平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\triangle AED$ 为等边三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF = \sqrt{2}$ ， M 为线段 BC 的中点。



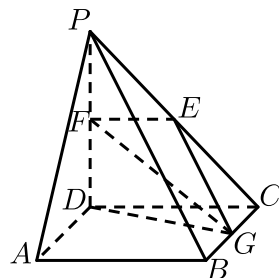
求直线 BF 与平面 BED 所成角的正弦值。

2. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$ ， $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ ， $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。



点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° ，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值。

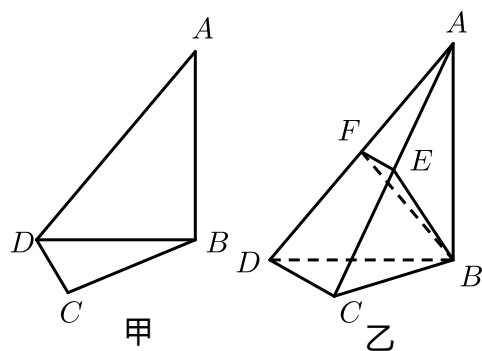
3. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AB = 2$ ，点 E 、 F 、 G 分别为 PC 、 PD 、 BC 的中点。



求二面角 $D-FG-E$ 的余弦值。

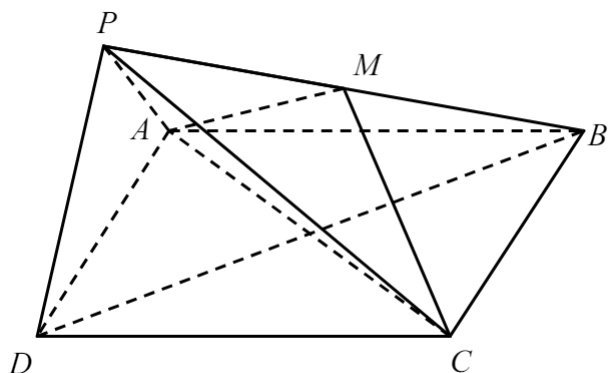
4. 如图甲，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 105^\circ$ ， $AB = BD$ ，现将四边形 $ABCD$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BDC （如图乙），设点 E 、 F 分别为棱 AC 、 AD 的中

点 .



- (1) 求 BF 与平面 ABC 所成角的正弦 .
- (2) 求二面角 $B - EF - A$ 的余弦 .

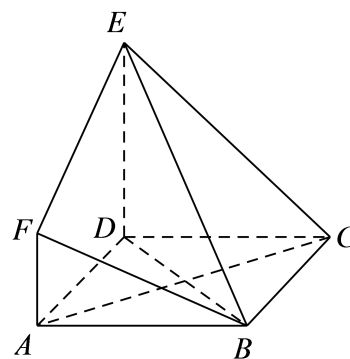
5. 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$ 中 , 底面 $ABCD$ 为正方形 , 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上 , $PD \parallel$ 平面 MAC , $PA = PD = \sqrt{6}$, $AB = 4$.



- (1) 求二面角 $B - PD - A$ 的大小 .
- (2) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值 .

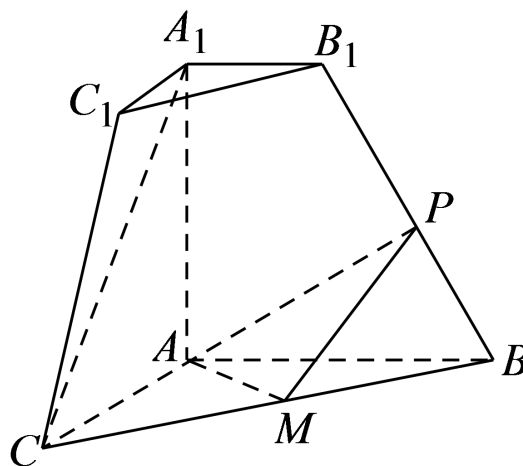
二、 动点问题

6. 如图 , $ABCD$ 是边长为 3 的正方形 , $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, $DE = 3AF$, 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° .



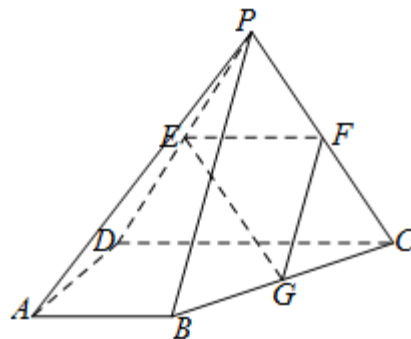
设点 M 是线段 BD 上一动点，试确定点 M 的位置，使得 $AM \parallel \text{平面} BEF$ ，并证明你的结论．

7. 如图，在直角梯形 AA_1B_1B 中， $\angle A_1AB = 90^\circ$ ， $A_1B_1 \parallel AB$ ， $AB = AA_1 = 2A_1B_1 = 2$ ，直角梯形 AA_1C_1C 通过直角梯形 AA_1B_1B 以直线 AA_1 为轴旋转得到，且使得平面 $AA_1C_1C \perp \text{平面} AA_1B_1B$ ． M 为线段 BC 的中点， P 为线段 BB_1 上的动点．



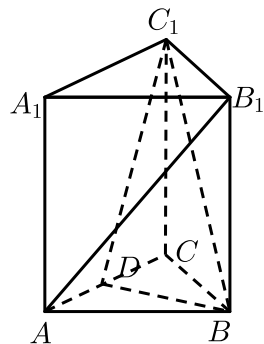
是否存在点 P ，使得直线 $A_1C \parallel \text{平面} AMP$ ？如果存在，求出 $\frac{BP}{PB_1}$ 的值，若不存在，请说明理由．

8. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \parallel DC$ ， $AD \perp DC$ ，侧面 $PDC \perp \text{底面} ABCD$ ， $\triangle PDC$ 是等边三角形， $AB = AD = \frac{1}{2}CD = 1$ ，点 E, F, G 分别是棱 PD, PC, BC 的中点．



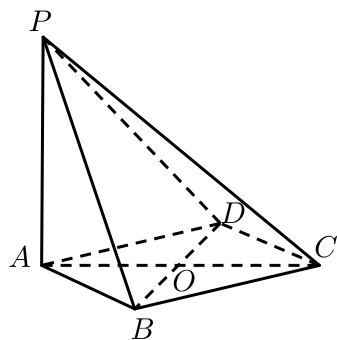
在线段 PB 上存在一点 Q ，使 $PC \perp \text{平面} ADQ$ ，且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ，求 λ 的值．

9. 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $A_1A \perp$ 平面 ABC ， $BC \perp AC$ ， $BC = AC = 1$ ， D 为 AC 的中点。



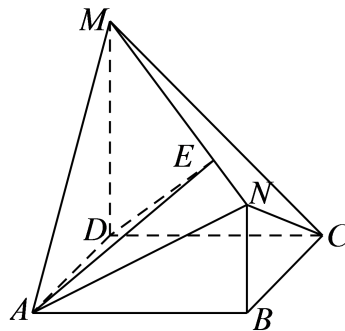
若点 P 在线段 AB_1 上，且 $CP \perp$ 平面 BDC_1 ，确定点 P 的位置并求线段 AA_1 的长。

10. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形， $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$



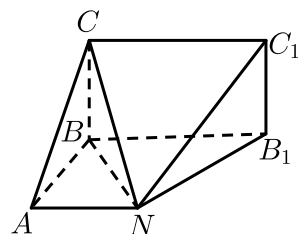
当平面 PBC 和平面 PCD 垂直时，求 PA 的长。

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形， $MD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $NB \parallel MD$ ，且 $NB = 1$ ， $MD = 2$



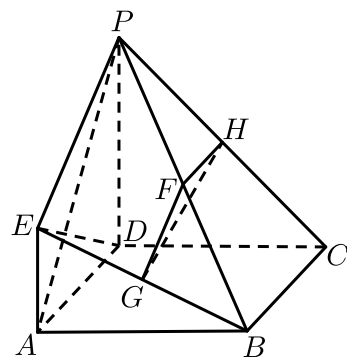
E 为直线 MN 上一点，且平面 $ADE \perp$ 平面 MNC ，求 $\frac{ME}{MN}$ 的值。

12. 如图：已知矩形 BB_1CC_1 所在平面与底面 ABB_1N 垂直，直角梯形 ABB_1N 中 $AN \parallel BB_1$ ， $AB \perp AN$ ， $CB = BA = AN = 2$ ， $BB_1 = 4$ 。



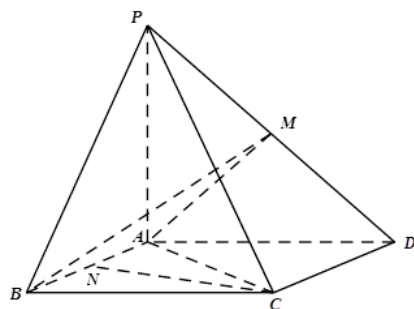
在 BC 边上找一点 P , 使 B_1P 与 CN 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{51}}{51}$, 并求线段 B_1P 的长.

13. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel PD$, $AD = PD = 2EA = 2$, F, G, H 分别为 PB, EB, PC 的中点.



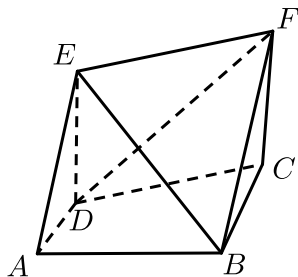
在线段 PC 上是否存在一点 M , 使直线 FM 与直线 PA 所成的角为 60° ? 若存在, 求出线段 PM 的长; 若不存在, 请说明理由.

14. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, M 是棱 PD 的中点, 且 $PA = AB = AC = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$.



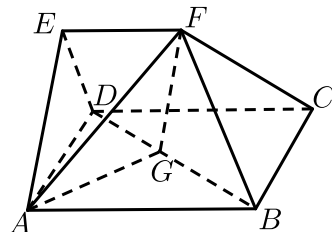
如果 N 是棱 AB 上一点, 且直线 CN 与平面 MAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 求 $\frac{AN}{NB}$ 的值.

15. 如图所示, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形, $CF = \sqrt{3}$, 平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.



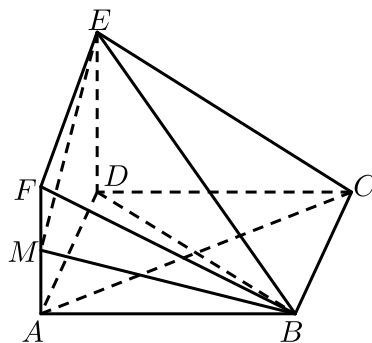
在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由。

16. 在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $DE = EF = 1$ ， $DC = 2$ ， $\angle EAD = 30^\circ$ 。



在线段 BD 上是否存在点 G ，使得平面 EAD 与平面 FAG 所成的锐二面角的大小为 30° ，若存在，求出 $\frac{DG}{DB}$ 的值；若不存在，说明理由。

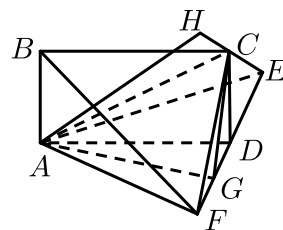
17. 如图， $ABCD$ 是边长为3的正方形，平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AF \parallel DE$ ， $AD \perp DE$ ， $AF = 2\sqrt{6}$ ， $DE = 3\sqrt{6}$ 。



在线段 AF 上是否存在点 M ，使得二面角 $M - BE - D$ 的大小为 60° ？若存在，求出 $\frac{AM}{AF}$ 的值；若不存在，说明理由。

三、综合创新

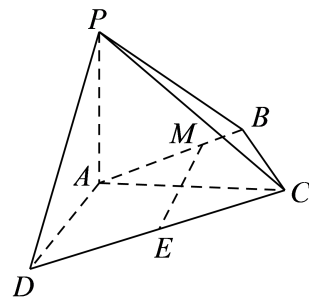
18. 如图，等腰直角三角形 AEF 的斜边 EF 的中点为 D ，四边形 $ABCD$ 为矩形，平面 $ABCD \perp$ 平面 AEF ，点 G 为 DF 的中点， $AD = 2AB = 2$ 。



- (1) 证明： $BF \parallel$ 平面 ACG 。
- (2) 求二面角 $D - BC - F$ 的正弦值。

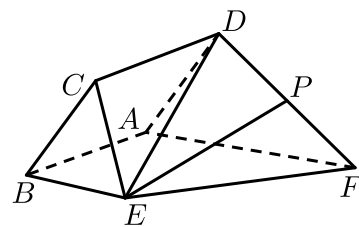
(3) 点 H 为直线 CE 上的点, 且 $\overrightarrow{CE} = -5\overrightarrow{CH}$, 求直线 AH 和平面 BCF 所成角的正弦值.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp AD$, $AB \perp BC$, $\angle BCA = 60^\circ$, $AP = AC = AD = 2$, E 为 CD 的中点, M 在 AB 上, 且 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.



- (1) 求证: $EM \parallel$ 平面 PAD .
 (2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.
 (3) 点 F 是线段 PD 上异于两端点的任意一点, 若满足异面直线 EF 与 AC 所成角 45° , 求 AF 的长.

20. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 与直角梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直, 其中 $BE \parallel AF$, $AB \perp AF$, $AB = BE = \frac{1}{2}AF = 2$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$, P 为 DF 的中点.



- (1) 求证: $PE \parallel$ 平面 $ABCD$.
 (2) 求二面角 $D-EF-A$ 的余弦值.
 (3) 设 G 为线段 AD 上一点, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 若直线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$, 求 AG 的长.