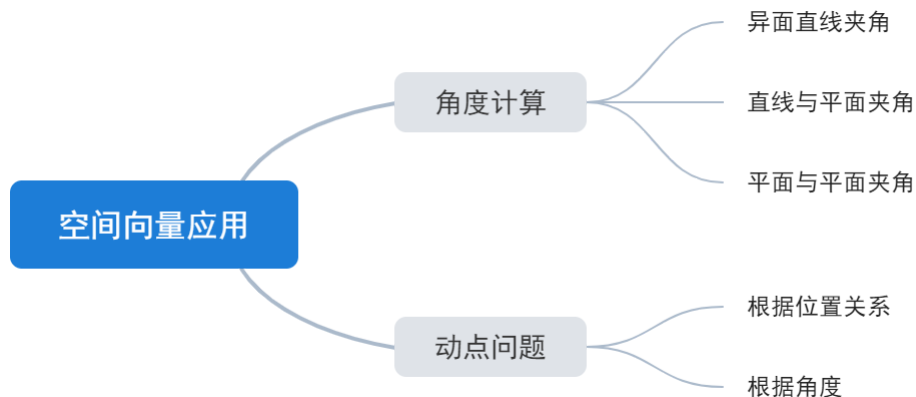


第二讲-空间向量的应用

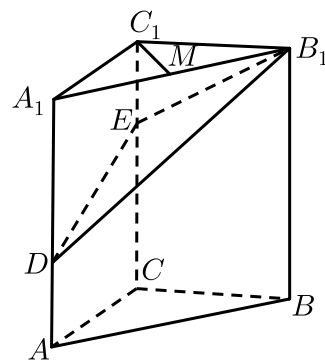
1. 知识梳理



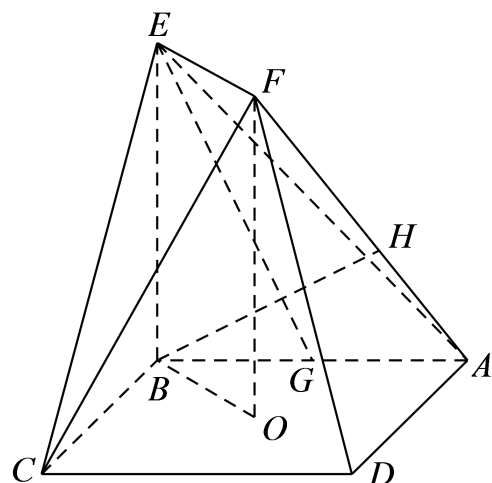
一、 角度计算

1. 真题分析

1. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，点 D ， E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， M 为棱 A_1B_1 的中点。



- (1) 求二面角 $B - B_1E - D$ 的正弦值 .
- (2) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值 .
2. 如图，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 为 AB 的中点， $AB = BE = 2$.



(1) 求二面角 $O - EF - C$ 的正弦值；

(2) 设 H 为线段 AF 上的点，且 $AH = \frac{2}{3}HF$ ，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值．

2. 思路总结

1、建系条件：优先寻找几何体中满足三条线两两垂直的模型，若找不到，退而求其次寻找线面垂直的模型；

2、异面直线夹角求解步骤：

- 计算两条异面直线端点的点坐标；
- 计算两条直线的方向向量；
- 计算两条异面直线的夹角；

3、线面角的求解步骤：

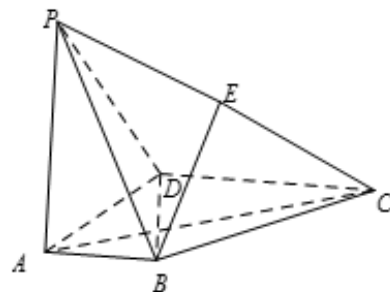
- 计算直线的端点坐标和平面内两条相交直线的端点坐标；
- 计算直线的方向向量和平面的法向量；
- 计算直线和平面的夹角；

4、二面角的求解步骤：

- 计算两个平面的法向量；
- 计算两个平面的夹角的余弦值并且判断角为钝角还是锐角；

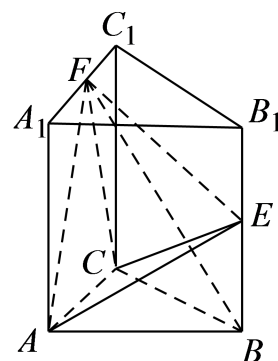
3. 模拟演练

3. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 为棱 PC 的中点．



- (1) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值；
 (2) 若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF \perp AC$ ，求二面角 $F - AB - P$ 的余弦值。

4. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$ ， $AA_1 = \sqrt{6}$ ，点 E ， F 分别为侧棱 BB_1 和边 A_1C_1 的中点。

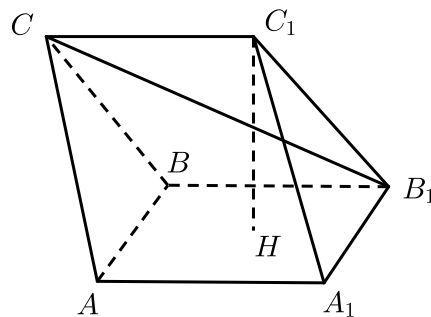


- (1) 求直线 AF 与平面 ACE 所成角的正弦值。
 (2) 求二面角 $F - CE - A$ 的余弦值。

二、动点位置确定

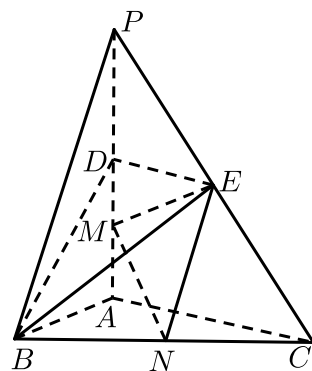
1. 真题分析

5. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， H 是正方形 AA_1B_1B 的中心， $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ，且 $C_1H = \sqrt{5}$



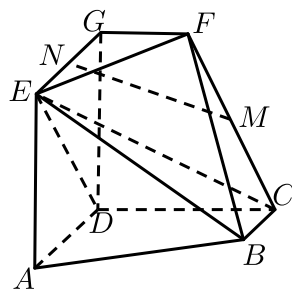
设 N 为棱 B_1C_1 的中点，点 M 在平面 AA_1B_1B 内，且 $MN \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，求线段 BM 的长。

6. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ．点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点， M 是线段 AD 的中点， $PA = AC = 4, AB = 2$ ．



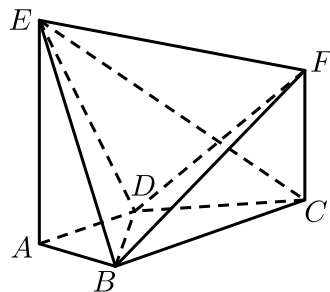
已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ，求线段 AH 的长．

7. 如图， $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$ ， $AD \perp CD$ ， $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$ ， $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$ ， $DG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DA = DC = DG = 2$ ．



若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° ，求线段 DP 的长．

8. 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1, AE = BC = 2$ ．



若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求线段 CF 的长．

2. 思路总结

动点问题解题思路：

1. 设出动点坐标，设法一般为如下形式：如果动点 C 在线段 AB 上，那么可以设成 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 的形式；
2. 写出动点 C 的坐标（以含有 λ 的式子表示），并且以此为基础写出相关直线的方向向量和相关平面的法向量；

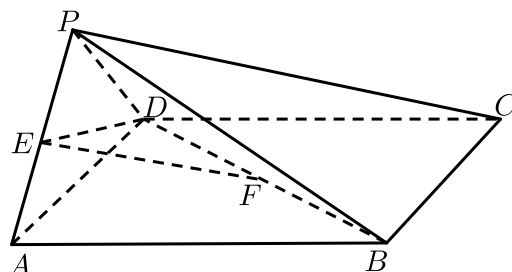
3. 根据题目给的角度或者位置关系列出方程；

4. 求解方程，解出 λ 即可.

以上四步可以总结为口诀：“设动点、写坐标、列方程、解方程”。

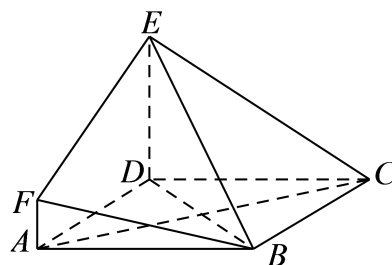
3. 模拟演练

9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E, F 分别为 PA, BD 中点， $PA = PD = AD = 2$ 。



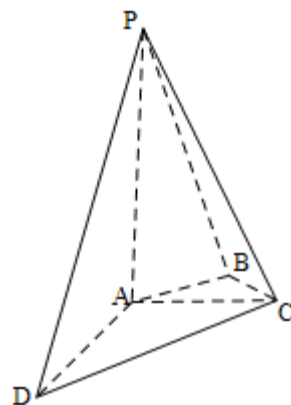
在棱 PC 上是否存在一点 G ，使 $GF \perp$ 平面 EDF ？若存在，指出点 G 的位置；若不存在，说明理由。

10. 如图， $ABCD$ 是边长为3的正方形， $DE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AF \parallel DE$ ， $DE = 3AF$ ， BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° 。



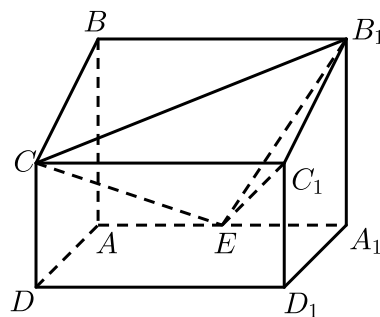
设点 M 是线段 BD 上的一个动点，试确定点 M 的位置，使得 $AM \parallel$ 平面 BEF ，并证明你的结论。

11. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC \perp AD$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $PA = AD = 2$ ， $AC = 1$ 。



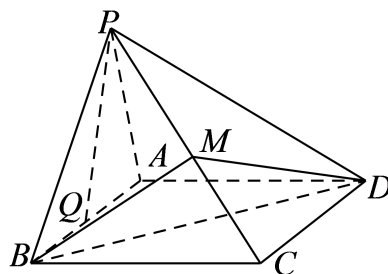
设 E 为棱 PA 上的点，满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30° ，求 AE 的长。

12. 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $AB \perp AD$ ， $AD = CD = 1$ ， $AA_1 = AB = 2$ ， E 为棱 AA_1 的中点。



设点 M 在线段 C_1E 上，且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ，求线段 AM 的长。

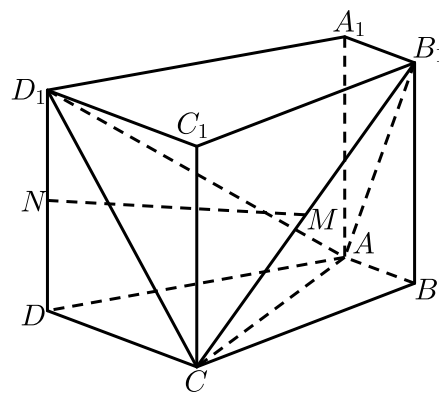
13. 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，侧面 PAB 是边长为2的正三角形，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ 。



在侧棱 PC 上存在一点 M ，使得二面角 $M - BD - C$ 的大小为 60° ，求 $\frac{CM}{CP}$ 的值。

三、综合创新

14. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \perp AC$ ， $AB = 1$ ， $AC = AA_1 = 2$ ， $AD = CD = \sqrt{5}$ ，且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点。

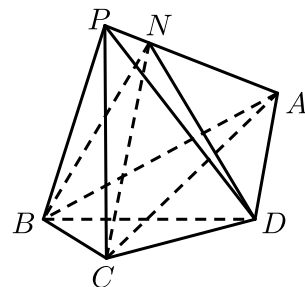


(1) 求证： $MN \parallel$ 平面 $ABCD$ 。

(2) 求二面角 $D_1 - AC - B_1$ 的正弦值 .

(3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点 , 若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 A_1E 的长 .

15. 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$ 中 , $AD \perp DC$, $AD = AB = 2\sqrt{3}$, $CB = CD = 2$, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $PC = 4$, 点 N 在线段 PA 上 , 且 $AN = 3NP$.

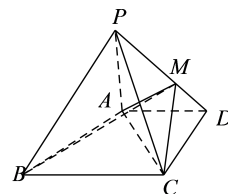


(1) 求证 : $DN \perp AC$.

(2) 求二面角 $C - DN - A$ 的正弦值 .

(3) 在线段 BP 上是否存在点 T , 使得 $CT \parallel$ 平面 PAD , 若存在 , 求出线段 BT 的长 , 若不存在 , 说明理由 .

16. 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$.



(1) 取 PC 的中点 N , 求证 : $DN \parallel$ 平面 PAB .

(2) 求直线 AC 与 PD 所成的余弦值 .

(3) 在线段 PD 上 , 是否存在一点 M , 使得二面角 $M - AC - D$ 的大小为 45° , 如果存在 , 求 BM 与平面 MAC 所成的角 , 如果不存在 , 请说明理由 .