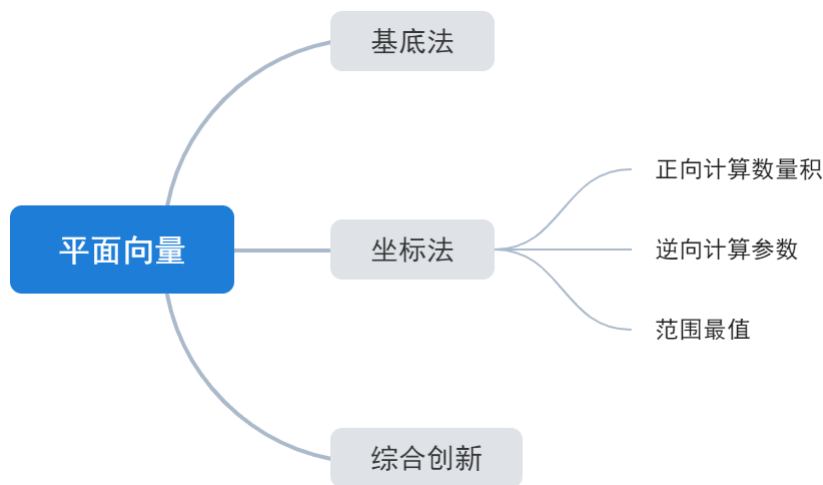


第二讲-平面向量

1. 知识梳理



一、 基底法

1. 真题分析

1. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使得 $DE = 2EF$ ，则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为（ ）。
- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

【答案】 B

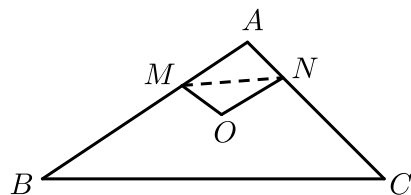
【解析】 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,
 $\therefore \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC})$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$, 选B.

【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题

备注：2016年高考真题天津卷文科第7题

分析：本题考察用基底法计算数量积，首先是确定一组基底，基底的要求是模长和夹角已知，因为本题所给的图形为正三角形而且边长已知，则可任取相邻两边作为基底，可选择 $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ 作为基底， $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \frac{\pi}{3}$ ，下面要做的是用基底表示 $\vec{AF}, \vec{BC}$ ，可得 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ ， $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$ ，接下来进行数量积运算即可。

2. 在如图的平面图形中，已知 $OM = 1$ ， $ON = 2$ ， $\angle MON = 120^\circ$ ， $\vec{BM} = 2\vec{MA}$ ， $\vec{CN} = 2\vec{NA}$ ，则 $\vec{BC} \cdot \vec{OM}$ 的值为 ()。



A. -15

B. -9

C. -6

D. 0

【答案】 C

【解析】 方法一：∵ $\vec{BM} = 2\vec{MA}$ ， $\vec{CN} = 2\vec{NA}$ ，

$$\therefore \frac{|\vec{MA}|}{|\vec{BA}|} = \frac{|\vec{NA}|}{|\vec{CA}|} = \frac{|\vec{MN}|}{|\vec{BC}|} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \vec{BC} = 3\vec{MN},$$

$$\therefore \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM},$$

$$\therefore \vec{BC} \cdot \vec{OM} = 3(\vec{ON} - \vec{OM}) \cdot \vec{OM} = 3(\vec{ON} \cdot \vec{OM} - |\vec{OM}|^2),$$

$$\therefore OM = 1, ON = 2, \angle MON = 120^\circ,$$

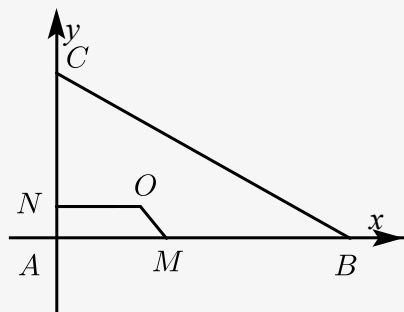
$$\therefore \vec{BC} \cdot \vec{OM} = 3 \times \left[1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \right] = -6.$$

方法二：在 $\triangle ABC$ 中，不妨设 $\angle BAC = 90^\circ$ ，取特殊情况

$ON \perp AC$ ，

以 A 为坐标原点， AB ， AC 所在直线分别为 x 轴， y 轴

建立如图所示的平面直角坐标系，



因为 $\angle MON = 120^\circ$ ， $ON = 2$ ， $OM = 1$ ，

$$\begin{aligned} &\text{所以 } O\left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \\ &M\left(\frac{5}{2}, 0\right), B\left(\frac{15}{2}, 0\right). \\ &\text{故 } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{15}{4} - \frac{9}{4} = -6. \\ &\text{故选C.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】建系法求平面向量的数量积；用基底法求向量的数量积

备注：2018年高考真题天津卷文科第8题

分析：本题考察基底法计算数量积，首先根据基底条件确定基底为 $\{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\}$ ，下面需要用基底表示 $\overrightarrow{BC}$ ，则有 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$ ，最后计算数量积即可。

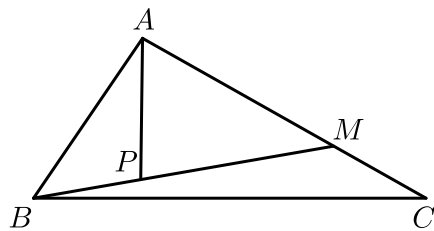
2. 思路总结

题型总结：

基底法一般适用于所给图形是非特殊图形的情况（这样不太好建立直角坐标系或者点的坐标不太好写），而且题目所给的条件可以找到一组基底（即模长和夹角已知或者可求），处理这类问题首先要做的寻找基底，然后用基底表示所求向量，最后进行数量积运算，在用基底表示的过程中要多构造平行四边形或者找合适三角形辅助线性运算。

3. 模拟演练

3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 M 在线段 AC 上，点 P 在线段 BM 上，且满足 $\frac{AM}{MC} = \frac{MP}{PB} = 2$ ，若 $AB = 2$ ， $AC = 3$ ， $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 _____。



【答案】 -2

【解析】 $\because |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{AC}| = 3, \angle BAC = \frac{2\pi}{3},$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \angle BAC = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3,$$

$$\therefore \vec{MP} = \frac{2}{3} \vec{MB},$$

$$\therefore \vec{AP} - \vec{AM} = \frac{2}{3} (\vec{AB} - \vec{AM}),$$

$$\vec{AP} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \vec{AC} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{2}{9} \vec{AC},$$

$$\therefore \vec{AP} \cdot \vec{BC}$$

$$= \left(\frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{2}{9} \vec{AC} \right) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{4}{9} \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{2}{9} \vec{AC}^2 - \frac{2}{3} \vec{AB}^2$$

$$= \frac{4}{9} \times (-3) + \frac{2}{9} \times 3^2 - \frac{2}{3} \times 2^2 = -2.$$

故答案为：-2.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$ ， $|\vec{BC}| = 3$ ， M, N 分别是 BC 边上的三等分点，则 $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ 的值是（ ）.

A. 5

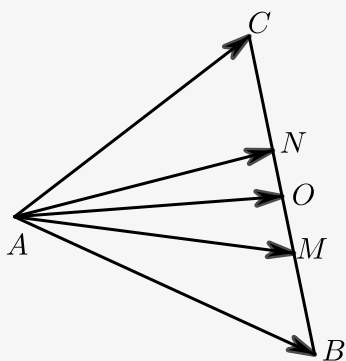
B. $\frac{21}{4}$

C. 6

D. 8

【答案】 C

【解析】 如图，



设 BC 的中点为 O ，由 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$ ，

$$\text{得} (\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{AO} + \vec{OC})$$

$$= (\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{AO} - \vec{OB})$$

$$= |\vec{AO}|^2 - |\vec{OB}|^2 = 4$$

$$\therefore |\vec{BC}| = 3,$$

$$\therefore |\vec{OB}|^2 = \frac{9}{4},$$

$$\begin{aligned}
 &\text{由此可得: } |\vec{AO}|^2 = \frac{25}{4}, \\
 &\text{而 } \vec{AM} \cdot \vec{AN} = (\vec{AO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{AO} + \vec{ON}) \\
 &= (\vec{AO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{AO} - \vec{OM}) = |\vec{AO}|^2 - |\vec{OM}|^2, \\
 &\text{由已知 } |\vec{OM}| = \frac{1}{2}, \\
 &\therefore |\vec{AO}|^2 - |\vec{OM}|^2 \\
 &= \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6, \\
 &\therefore \vec{AM} \cdot \vec{AN} = 6.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则；线性运算和数量积综合问题

二、坐标法

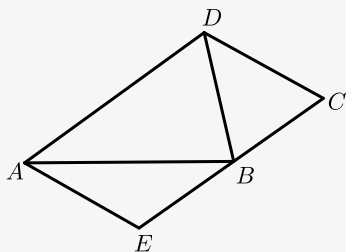
1. 真题分析

正向求数量积

5. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 5$. $\angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\vec{BD} \cdot \vec{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】



$$\begin{aligned}
 &\because AE = BE, AD \parallel BC, \angle A = 30^\circ, \\
 &\therefore \text{在等腰三角形 } ABE \text{ 中, } \angle BEA = 120^\circ, \\
 &\text{又 } AB = 2\sqrt{3}, \therefore AE = 2, \\
 &\therefore \vec{BE} = -\frac{2}{5}\vec{AD}, \\
 &\therefore \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}, \therefore \vec{AE} = \vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AD}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD}, \\
\therefore \vec{BD} \cdot \vec{AE} &= (-\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AD}) \\
&= -\vec{AB}^2 + \frac{7}{5}\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \frac{2}{5}\vec{AD}^2 \\
&= -\vec{AB}^2 + \frac{7}{5}|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cos A - \frac{2}{5}\vec{AD}^2 \\
&= -12 + \frac{7}{5} \times 5 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{5} \times 25 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

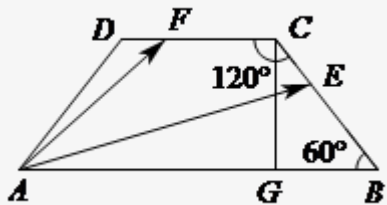
故答案为：-1.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题

6. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上，且 $\vec{BE} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ ， $\vec{DF} = \frac{1}{6}\vec{DC}$ ，则 $\vec{AE} \cdot \vec{AF}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{29}{18}$

【解析】



$$\begin{aligned}
&\because AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ, \\
&\therefore BG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}, CD = 2 - 1 = 1, \angle BCD = 120^\circ. \\
&\because \vec{BE} = \frac{2}{3}\vec{BC}, \vec{DF} = \frac{1}{6}\vec{DC}, \\
&\therefore \vec{AE} \cdot \vec{AF} = (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DF}) \\
&= (\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}) \cdot (\vec{AD} + \frac{1}{6}\vec{DC}) \\
&= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{6}\vec{AB} \cdot \vec{DC} + \frac{2}{3}\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{BC} \cdot \frac{1}{6}\vec{DC} \\
&= 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times \cos 0^\circ + \frac{2}{3} \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times \cos 120^\circ \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{29}{18}.
\end{aligned}$$

故答案为： $\frac{29}{18}$.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

逆向求参数

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 1$, 则 AB 的长为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 先将再 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ 用 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 线性表示, 然后设出 AB 的长, 利用数量积的定义进行运算, 结合已知条件即可求得 AB 的长.

设 AB 的长为 $a(a > 0)$, 又因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a + 1 \\ &, \text{由已知可得} -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a + 1 = 1. \text{又} a = \frac{1}{2}, \text{即} AB \text{的长为} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 向量的数量积的定义

8. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB = 2$, 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}$, 则 $\lambda = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

【答案】 A

【解析】方法一： $\because \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}, \text{ 且 } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2, \angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = 60^\circ,$$

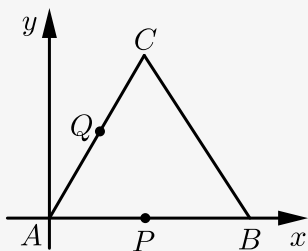
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2,$$

$$\therefore [(1-\lambda)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}](\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{3}{2},$$

$$\lambda |\overrightarrow{AB}|^2 + (\lambda^2 - \lambda - 1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore 4\lambda + 2(\lambda^2 - \lambda - 1) + 4(1 - \lambda) = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

方法二：以点A为坐标原点，AB所在的直线为x轴，过点A且垂直于AB的直线为y轴，建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1, \sqrt{3})$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore P(2\lambda, 0), Q(1 - \lambda, \sqrt{3}(1 - \lambda)),$$

$$\therefore \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = (-1 - \lambda, \sqrt{3}(1 - \lambda)) \cdot (2\lambda - 1, -\sqrt{3}) = -\frac{3}{2},$$

$$\text{化简得 } 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

9. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC$,

$DF = \mu DC$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$, $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{7}{12}$

【答案】 C

【解析】 方法一：因为 $\angle BAD = 120^\circ$, 所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 120^\circ = -2.$$

因为 $BE = \lambda BC$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

因为 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$,

$$\text{所以 } (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD}) \cdot (\mu \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 1,$$

$$\text{即 } 2\lambda + 2\mu - \lambda\mu = \frac{3}{2} \quad ①$$

$$\text{同理可得 } \lambda\mu - \lambda - \mu = -\frac{2}{3} \quad ②, \quad ①+② \text{ 得 } \lambda + \mu = \frac{5}{6}.$$

方法二：由题意可得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF}$$

$$= 2 \times 2 \times \cos 120^\circ + \overrightarrow{AB} \cdot \mu \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{AD} \cdot \mu \overrightarrow{AB}$$

$$= -2 + 4\mu + 4\lambda + \lambda\mu \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ$$

$$= 4\lambda + 4\mu - 2\lambda\mu - 2 = 1,$$

$$\therefore 4\lambda + 4\mu - 2\lambda\mu = 3 \text{ ①}.$$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{EC} \cdot (-\overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FC}$$

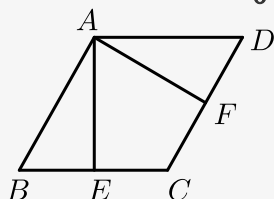
$$= (1-\lambda)\overrightarrow{BC} \cdot (1-\mu)\overrightarrow{DC} = (1-\lambda)\overrightarrow{AD} \cdot (1-\mu)\overrightarrow{AB}$$

$$= (1-\lambda)(1-\mu) \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = (1-\lambda-\mu+\lambda\mu)(-2)$$

$$= -\frac{2}{3},$$

$$\text{即 } -\lambda - \mu + \lambda\mu = -\frac{2}{3} \text{ ②},$$

$$\text{由①②求得 } \lambda + \mu = \frac{5}{6},$$



故选C.

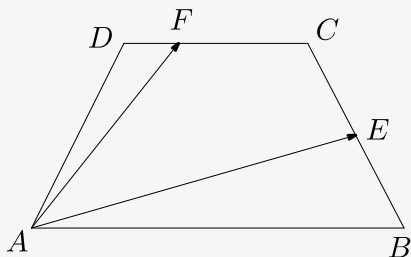
【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

范围最值

10. 在等腰梯形ABCD中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，动点E和F分别在线段BC和DC上，且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{29}{18}$

【解析】 方法一：如图，



易求得， $CD = 1$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{9} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= 1 + \frac{2}{9\lambda} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{18}$$

$$\geq \frac{17}{18} + 2\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{29}{18},$$

当且仅当 $\frac{2}{9\lambda} = \frac{1}{2}\lambda$, 即 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, 取“=”.

故答案为 $\frac{29}{18}$.

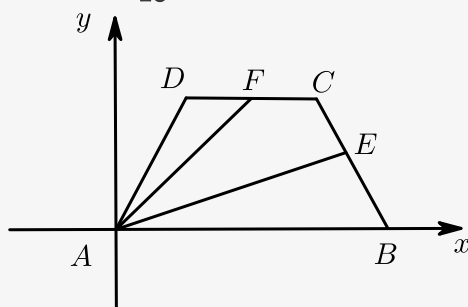
方法二: 如图, 建立直角坐标系, 则 $B(2, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

由 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$ 得 $E\left(2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$, 由 $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$ 得 $F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9\lambda}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{17}{18} + \frac{2}{9\lambda} + \frac{\lambda}{2} \geq \frac{17}{18} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{18}$$

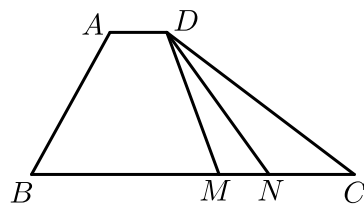
(当且仅当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, 取等号).

故答案为: $\frac{29}{18}$.



【标注】【知识点】基本不等式的概念

11. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 _____, 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 _____.



【答案】 $\frac{1}{6}; \frac{13}{2}$

【解析】 $\because \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

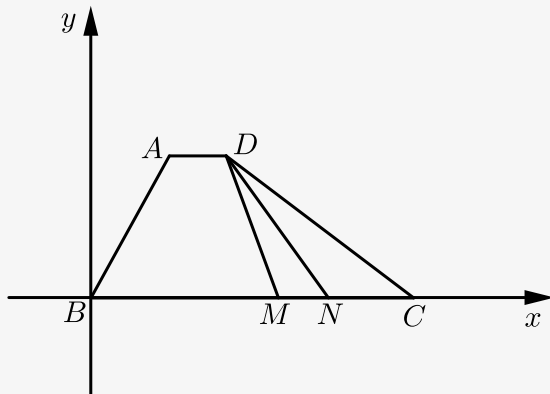
$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B = 120^\circ,$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos 120^\circ = 3 \times |\vec{AD}| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore |\vec{AD}| = 1,$$

$$\text{又 } BC = |\vec{BC}| = 6, \therefore \lambda = \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{BC}|} = \frac{1}{6}.$$

以B点为原点，建立如图所示平面直角坐标系，



则 $B(0,0)$, $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 设 $M(t,0) (0 \leq t \leq 5)$,

由 $|\vec{MN}| = 1$ 得 $N(t+1,0)$,

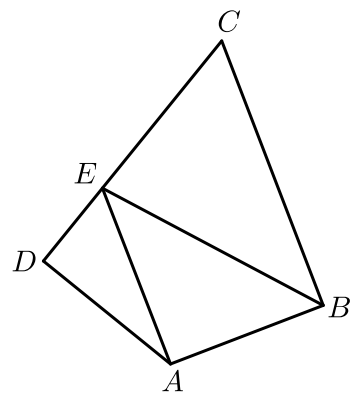
$$\therefore \vec{DM} = \left(t - \frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \vec{DN} = \left(t - \frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{DM} \cdot \vec{DN} &= \left(t - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(t - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= t^2 - 4t + \frac{21}{2} = (t-2)^2 + \frac{13}{2} \quad (0 \leq t \leq 5), \end{aligned}$$

$$\therefore \text{当 } t=2 \text{ 时, } (\vec{DM} \cdot \vec{DN})_{\min} = \frac{13}{2}.$$

【标注】【知识点】数量积的最值问题

12. 如图，在平面四边形ABCD中， $AB \perp BC$ ， $AD \perp CD$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = AD = 1$ ，若点E为边CD上的动点，则 $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 的最小值为（ ）.



A. $\frac{21}{16}$

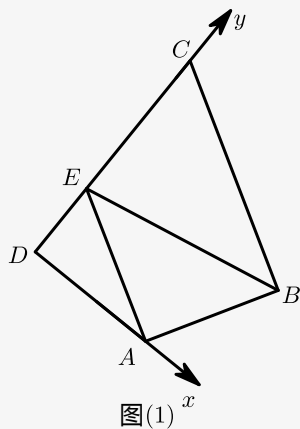
B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$

D. 3

【答案】A

【解析】方法一：以 D 为坐标原点， DA 所在直线为 x 轴， DC 所在直线为 y 轴，建立如图(1)所示的平面直角坐标系：



此时 $D(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C(0, \sqrt{3})$ ，

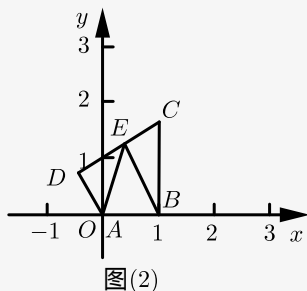
设 E 点坐标为 $(0, y)$ ，其中 $y \in [0, \sqrt{3}]$ ，

则 $\overrightarrow{AE} = (-1, y)$ ， $\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y = \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{21}{16}$ ，所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 $\frac{21}{16}$ ，故选

A.

方法二：以点 A 为坐标原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，建立如图(2)所示的平面直角坐标系，



依题意得， $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ，

因为 $AD = 1$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ，

所以 $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，且直线 CD 的倾斜角为 30° ，

所以直线 CD 的方程为 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ，即 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$ ，

因为 $AB \perp BC$ ，代入 $x = 1$ ，得 $y = \sqrt{3}$ ，

所以点 C 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$,

因为点 E 为边 CD 上的动点, 故可设 $E\left(t, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$, $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$,

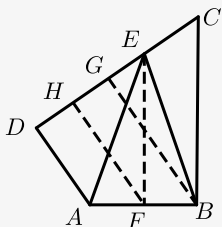
所以 $\overrightarrow{AE} = \left(t, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$, $\overrightarrow{BE} = \left(t-1, \frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right)$,

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = t(t-1) + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(t+2)\right]^2 = \frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{21}{16}$,

所以当 $t = -\frac{1}{8}$ 时, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{21}{16}$.

故选A.

方法三: 如图(3), 取 AB 的中点 F , 连接 EF ,



图(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}) \cdot (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FA}) \\ &= |\overrightarrow{EF}|^2 - |\overrightarrow{FA}|^2 = |\overrightarrow{EF}|^2 - \frac{1}{4},\end{aligned}$$

可知当且仅当 $|\overrightarrow{EF}|$ 最小时, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 取得最小值, 分别过 F, B 作 CD 的垂线, 垂足分别为 H, G ,

当点 E 与 H 重合时, $|\overrightarrow{EF}|$ 取到最小值, 易知此时 EF 为梯形 $DABG$ 的中位线 HF ,

由已知得 $BG = \frac{3}{2}$, $AD = 1$,

$$\text{则 } |\overrightarrow{EF}|_{\min} = HF = \frac{1}{2}(BG + AD) = \frac{5}{4},$$

故 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 $\frac{21}{16}$.

故选A.

方法四: 连接 BD , 可知 $\triangle ABD$ 为等腰三角形,

又 $AB \perp BC$, $AD \perp CD$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形, $BD = \sqrt{3}$,

设 $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{DC}$ ($0 \leq t \leq 1$),

则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$

$$\begin{aligned}&= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DE}^2 \\ &= \frac{3}{2} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE}^2\end{aligned}$$

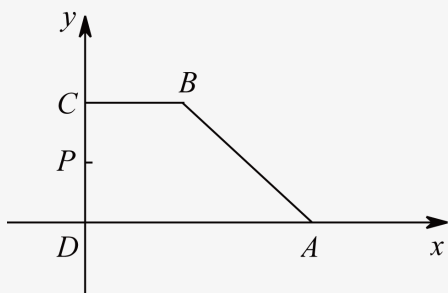
$$\begin{aligned}
 &= 3t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \\
 &= 3\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{16} \quad (0 \leq t \leq 1) . \\
 &\text{所以当 } t = \frac{1}{4} \text{ 时, 上式取最小值 } \frac{21}{16} , \\
 &\text{故选 A .}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示

13. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $|\vec{PA} + 3\vec{PB}|$ 的最小值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 建立如图所示的坐标系, 设 $CD = h$,



则 $A(2, 0)$, $B(1, h)$, 设 $P(0, y)$, $(0 \leq y \leq h)$

则 $\vec{PA} = (2, -y)$, $\vec{PB} = (1, h - y)$,

$$\therefore |\vec{PA} + 3\vec{PB}| = \sqrt{25 + (3h - 4y)^2} \geq \sqrt{25} = 5 .$$

【标注】【知识点】向量的模；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

2. 思路总结

坐标法计算数量积解题步骤：

- 1、建立平面直角坐标系；
- 2、写出相关点的坐标；
- 3、计算相关向量的坐标；
- 4、列式计算数量积或者最值、或者列方程求解参数；

3. 模拟演练

正向求数量积

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 2AC$, M 是 BC 的中点, 点 N 在线段 AB 上, $\overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{AN}$, CN 与 AM 交于点 P , $AC = 1$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】 方法一: 由题意, $AB = 2$, $AC = 1$. 设 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AP}$.

$$\because M \text{ 为 } BC \text{ 中点, 则 } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AP}.$$

$$\text{又} \because C, P, N \text{ 三点共线且 } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AN} + \mu\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \lambda + \mu = 1.$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2t}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{AC}.$$

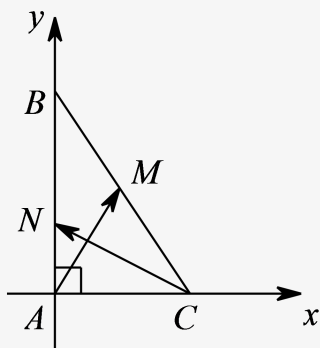
$$\therefore \frac{\lambda}{3} = \mu, \text{ 得 } \lambda = \frac{3}{4}, \mu = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(AC^2 - AB^2) = -\frac{3}{4}.$$

方法二: 如图建系



由题意得 $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(1,0)$, $N(0, \frac{2}{3})$, $M(\frac{1}{2}, 1)$,

$$\therefore l_{AM} = y = 2x, l_{CN} = y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3},$$

$$\therefore \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{BC} = (1, -2),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4} \times 1 + (-2) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

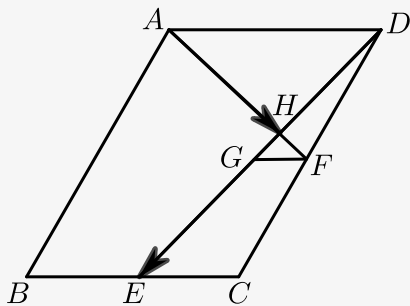
故答案为 $-\frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则; 平面向量数量积运算 (非坐标)

15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AD}| = 2$, $|\overrightarrow{CD}| = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 的中点, DE 与 AF 交于 H , 则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的值().
- A. 12 B. 16 C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{16}{5}$

【答案】 C

【解析】 过点 F 作 BC 的平行线交 DE 于 G ,



则 G 是 DE 的中点,

$$\text{且 } GF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore GF = \frac{1}{4}AD,$$

则 $\triangle AHD \sim \triangle GHF$,

$$\text{从而 } FH = \frac{1}{4}AH,$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AF},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right)$$

$$= \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}^2$$

$$= \frac{2}{5} \times 16 - \frac{3}{5} \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \times 4$$

$$= \frac{32}{5} - \frac{12}{5} - \frac{8}{5}$$

$$= \frac{12}{5}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 平面向量数量积运算(非坐标); 平面向量的数乘运算及运算规则

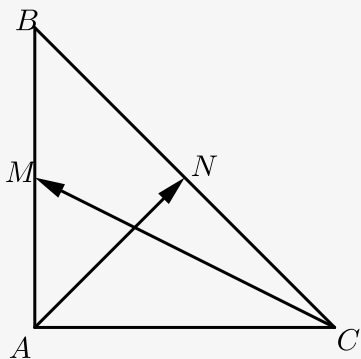


逆向求参数

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 1$ ， $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ， $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ， $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}$ ，则 $\angle ABC =$ （ ）.
- A. $\frac{5\pi}{12}$
- B. $\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{4}$
- D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】如图，



$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}, \\ \therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos \angle BAC - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \text{解得} \cos \angle BAC = 0, \\ \text{则} \angle BAC &= \frac{\pi}{2}. \\ \therefore \angle ABC &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

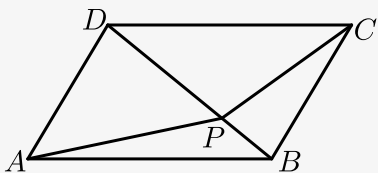
故选：C.

【标注】 【知识点】 向量的数量积的定义

17. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{PB} (\lambda > 1)$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = -\frac{5}{3}$, 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, 则实数 $\lambda =$ _____.

【答案】 2

【解析】



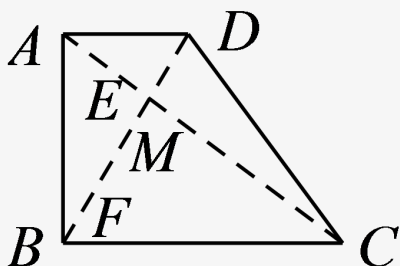
$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{PB} (\lambda > 1)$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{AD} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AB}$,
 $\therefore \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{AD} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
 $= \frac{-\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AD} + \frac{-1}{\lambda+1} \overrightarrow{AB}$,
 $\because |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{AD}| = 1, \angle BAD = 60^\circ$,
 $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$,
 $\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = - \left(\frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{AD} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{\lambda+1} \overrightarrow{AB} \right)$
 $= - \left(\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} + \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{(\lambda+1)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} \right)$
 $= - \frac{\lambda^2 + 5\lambda + 1}{(\lambda+1)^2}$
 $= -\frac{5}{3}$,
 解得 $\lambda = 2$, 或 $\lambda = \frac{1}{2}$ (舍去).
 故答案为: 2.

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

18. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AD = 1$, 对角线 AC 与 BD 交于点 M , 点 E 和 F 分别在线段 AM 和 BM 上, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BF} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}$, 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda = ()$.
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】 B

【解析】

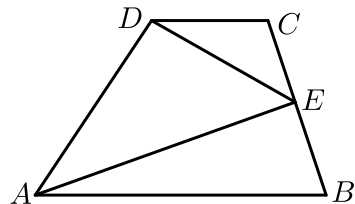


$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}), \\
&= (\overrightarrow{DA} + \lambda \overrightarrow{AM}) \cdot [\overrightarrow{CB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{BM}], \\
&= \left(\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \right) \left[\overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AD}) \right], \\
&= \left[\left(\frac{\lambda}{3} - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{BC} + \frac{\lambda}{3} \overrightarrow{AB} \right] \left[\left(1 - \frac{1 - \lambda}{3} \right) \overrightarrow{CB} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} \overrightarrow{BA} \right], \\
&= \frac{3}{4}, \\
\text{解得 } \lambda &= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；向量的数量积的定义；平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题；线段的定比分点公式；向量分解中的待定系数法

范围最值

19. 如图梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$, $AD = 2DC = 4$, E 在线段 BC 上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ().



- A. $\frac{15}{13}$ B. $\frac{95}{13}$ C. 15 D. $-\frac{15}{13}$

【答案】 B

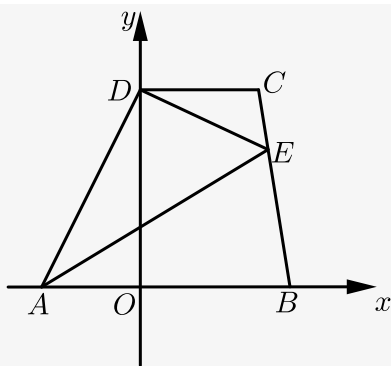
【解析】 在梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, 则向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角和向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角相等, 不妨设为 θ .

由 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 可知, $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$, 整理得

$$16 - 20 \cos \theta + 8 \cos \theta - 10 = 0, \text{ 解之得 } \cos \theta = \frac{1}{2},$$

$\therefore \theta = 60^\circ$, 即 $\angle DAB = 60^\circ$,

过点 D 向 AB 作垂线垂足为 O , 建立如图所示直角坐标系,



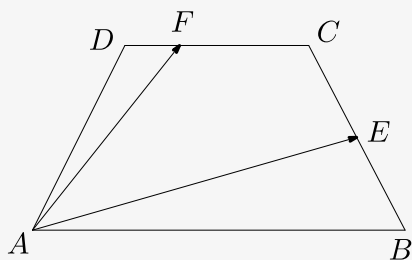
则 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$, $D(0, 2\sqrt{3})$, $C(2, 2\sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC} = (-\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$,
 $\therefore E(3 - \lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$,
 所以 $\overrightarrow{AE} = (5 - \lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$, $\overrightarrow{DE} = (3 - \lambda, 2\sqrt{3}(\lambda - 1))$,
 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = (5 - \lambda)(3 - \lambda) + 12\lambda(\lambda - 1) = 13\lambda^2 - 20\lambda + 15$,
 又知 $0 \leq \lambda \leq 1$, 当 $\lambda = \frac{10}{13}$ 时, 取得最小值 $\frac{95}{13}$.
 故选 B.

【标注】【知识点】建系法求平面向量的数量积

20. 在等腰梯形 $ABCD$ 中已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{8\lambda} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{15 + 8\sqrt{2}}{16}$

【解析】



结合题意可得 $CD = 1$,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE},$$

$$= \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF},$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{8\lambda} \overrightarrow{DC},$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16\lambda} \overrightarrow{AB},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF},$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{AB} + \lambda \vec{BC}) \cdot \left(\vec{AD} + \frac{1}{16\lambda} \vec{AB} \right), \\
&= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{16\lambda} |\vec{AB}|^2 + \lambda \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{16\lambda} \cdot \lambda \cdot \vec{AB} \cdot \vec{BC}, \\
&= 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16\lambda} \times 4 + \lambda \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}, \\
&= \frac{15}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&= \frac{15 + 8\sqrt{2}}{16}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{15 + 8\sqrt{2}}{16}$

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；平面向量的数乘运算及运算规则

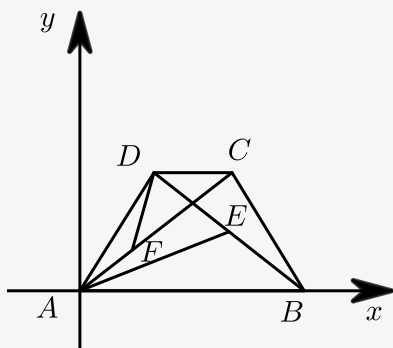
21. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $DC = 1$, $AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 E 在直线 BD 上, 点 F 在直线 AC 上, 且 $\vec{BE} = \lambda \vec{BD}$, $\vec{CF} = \mu \vec{CA}$, $\vec{AE} \cdot \vec{DF} = 4$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为().

A. $\frac{11 + 4\sqrt{6}}{3}$
C. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{11}{3}$
D. $\frac{11 - 4\sqrt{6}}{3}$

【答案】 A

【解析】 以 A 为原点,



$$\begin{aligned}
&\because \text{梯形} ABCD \text{ 中, } AB \parallel CD, AB = 4, DC = 1, AD = 2, \angle DAB = 60^\circ, \\
&\therefore A(0,0), B(4,0), C(2,\sqrt{3}), D(1,\sqrt{3}), \\
&\therefore \vec{BD} = (-3, \sqrt{3}), \vec{CA} = (-2, -\sqrt{3}), \\
&\therefore \vec{BE} = \lambda \vec{BD}, \vec{CF} = \mu \vec{CA}, \vec{AE} \cdot \vec{DF} = 4, \\
&\therefore \vec{BE} = \lambda(-3, \sqrt{3}) = (-3\lambda, \sqrt{3}\lambda), \vec{CF} = \mu(-2, -\sqrt{3}) = (-2\mu, -\sqrt{3}\mu), \\
&\therefore E(4 - 3\lambda, \sqrt{3}\lambda), F(2 - 2\mu, \sqrt{3} - \sqrt{3}\mu), \\
&\therefore \vec{AE} = (4 - 3\lambda, \sqrt{3}\lambda), \vec{DF} = (1 - 2\mu, -\sqrt{3}\mu), \\
&\therefore (4 - 3\lambda)(1 - 2\mu) - 3\lambda\mu = 4, \\
&\therefore \frac{1}{\mu} + \frac{8}{3\lambda} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lambda + \mu &= (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{8}{3\lambda} \right) = 1 + \frac{8}{3} + \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{8\mu}{3\lambda} \geq \frac{11}{3} + 2\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{8\mu}{3\lambda}} = \frac{11}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{11 + 4\sqrt{6}}{3},\end{aligned}$$

当且仅当 $\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{2}\mu$ 时取等号,

故 $\lambda + \mu$ 最小值为 $\frac{11 + 4\sqrt{6}}{3}$.

故选 A.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；平面向量加、减、数乘的坐标运算；向量系数求值问题；数量积的坐标表达式

22. 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 2$, $\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}$, 动点 E , F 分别在线段 CD 和 BC 上, 且 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最大值为 $\frac{7}{2}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[\frac{7}{4}, \frac{5}{2} \right]$

【解析】 由 $\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle DAC = 60^\circ$,

根据数量积的几何意义, 可知, 当点 E 在 D 处时, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ 最大,

过 D , C 分别作 AB 的垂线, 垂足为 M , N ,

则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最大值为 $BA \cdot BM = \frac{7}{2}$,

$\therefore BM = \frac{7}{4} \Rightarrow AM = \frac{1}{4}, BN = \frac{3}{4}$,

以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴建立直角坐标系,

则 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $D\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

根据数量积的几何意义, 可知, 当点 F 在 C 处时, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ 最小,

此时 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{7}{4}$,

当点 F 在 B 处时, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ 最大,

此时 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \cdot AN = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围为 $\left[\frac{7}{4}, \frac{5}{2} \right]$.

故答案为: $\left[\frac{7}{4}, \frac{5}{2} \right]$.

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐

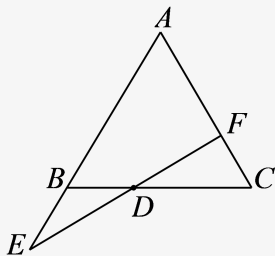
标)

三、综合创新

23. D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$, 过 D 点的直线分别交直线 AB 、 AC 于 E 、 F , 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \mu\overrightarrow{AC}$, 其中 $\lambda > 0$, $\mu > 0$, 则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} =$ _____.

【答案】 3

【解析】 如图所示,



$$\therefore \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{EB} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB};$$

又 E, D, F 三点共线,

$$\therefore \text{存在实数 } k, \text{ 使 } \overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{EF} = k(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = k\mu\overrightarrow{AC} - k\lambda\overrightarrow{AB};$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB};$$

$$\therefore (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} = (k\mu\overrightarrow{AC} - k\lambda\overrightarrow{AB}) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right),$$

$$\text{即 } (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} = \left(k\mu - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{3} - k\lambda\right)\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \begin{cases} k\mu - \frac{1}{3} = 0 \\ 1 - \lambda = \frac{1}{3} - k\lambda \end{cases}$$

$$\text{解得 } \mu = \frac{1}{3k}, \lambda = \frac{2}{3(1 - k)};$$

$$\therefore \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3(1 - k) + 3k = 3.$$

故答案为: 3.

【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合 (非坐标); 平面向量基本定理及其意义

在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -2$, 动点 P, M 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是().

A. $\frac{43}{4}$

B. $\frac{49}{4}$

C. $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

【答案】 B

【解析】 方法一：由题意，

$$|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|, \text{ 所以 } D \text{ 到 } A, B, C \text{ 三点的距离相等, } D \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的外心;}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \text{ 所以 } DB \perp AC,$$

同理可得, $DA \perp BC, DC \perp AB$

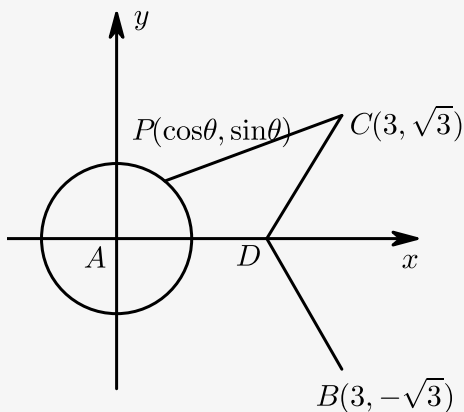
从而 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心;

$\therefore \triangle ABC$ 的外心与垂心重合, 因此 $\triangle ABC$ 是正三角形, 且 D 是 $\triangle ABC$ 的中心;

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DB}| \cos \angle ADB = |\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DB}| \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow |\overrightarrow{DA}| = 2$$

所以正三角形 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$;

我们以 A 为原点建立直角坐标系, B, C, D 三点坐标分别为 $B(3, -\sqrt{3}), C(3, \sqrt{3}), D(2, 0)$.



由 $|\overrightarrow{AP}| = 1$, 设 P 点的坐标为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$,

而 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 即 M 是 PC 的中点,

可以写出 M 的坐标为 $M\left(\frac{3+\cos \theta}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sin \theta}{2}\right)$

则

$$|\overrightarrow{BM}|^2 = \left(\frac{\cos \theta - 3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3} + \sin \theta}{2}\right)^2 = \frac{37 + 12 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{4} \leq \frac{37 + 12}{4} = \frac{49}{4}$$

当 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 时, $|\overrightarrow{BM}|^2$ 取得最大值 $\frac{49}{4}$.

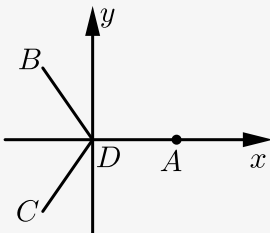
方法二: $\because |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$,

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{2\pi}{3}$,

又 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -2$,

$\therefore |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = 2$,

以 D 为坐标原点, 以 DA 所在直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A(2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(-1, -\sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$,

$\therefore M$ 是线段 PC 的中点,

$\therefore |\overrightarrow{AP}| = 1$,

$\therefore P$ 在以 $A(2, 0)$ 为圆心, 以1为径的圆上,

故令 $P(2 + \cos \theta, \sin \theta)$,

$\therefore M\left(\frac{1 + \cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta - \sqrt{3}}{2}\right)$,

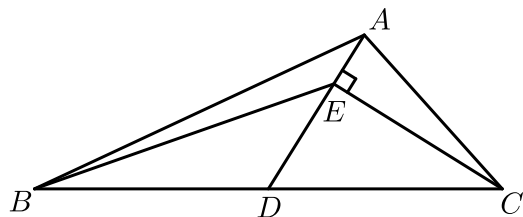
$\therefore |\overrightarrow{BM}|^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta - \sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \frac{37}{4} + \frac{3}{2}\cos \theta - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sin \theta$
 $= \frac{37}{4} + 3\left(\frac{1}{2}\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta\right) = \frac{37}{4} + 3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$,

故当 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 时, $|\overrightarrow{BM}|^2$ 取得最大值为 $\frac{49}{4}$.

故选B.

【标注】【知识点】向量的模；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量与三角形的“心”；平面向量的加法运算及运算规则；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 3$, $AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, D 为边 BC 的中点, 若 $CE \perp AD$, 垂足为 E , 则 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$ 的值为 _____.



【答案】 $-\frac{27}{7}$

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理：

$$BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19,$$

$$\therefore BC = \sqrt{19}, BD = DC = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{4 + 19 - 9}{2 \times 2 \times \sqrt{19}} = \frac{7}{2\sqrt{19}},$$

在 $\triangle ACD$ 中：

$$AD^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{19}}{2} \times \frac{7}{2\sqrt{19}} = \frac{7}{4},$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ADC = \frac{\frac{7}{4} + \frac{19}{4} - 4}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times \frac{\sqrt{19}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{7} \times \sqrt{19}},$$

$$\text{在Rt}\triangle CDE\text{中}, DE = CD \cdot \cos \angle ADC = \frac{5}{2\sqrt{7}},$$

$$\therefore \vec{EB} \cdot \vec{EC}$$

$$= (\vec{ED} + \vec{DB}) \cdot (\vec{ED} + \vec{DC})$$

$$= (\vec{ED} + \vec{DB}) \cdot (\vec{ED} - \vec{DB})$$

$$= \vec{ED}^2 - \vec{DB}^2$$

$$= \left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{25}{28} - \frac{19}{4}$$

$$= -\frac{27}{7}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{27}{7}.$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

26. 在平面内，若有 $|\vec{a}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，则 $|\vec{c}|$ 的最大值为_____.

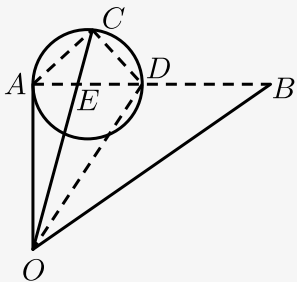
【答案】 $\frac{\sqrt{19} + \sqrt{3}}{4}$

【解析】 根据条件, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$,

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}, \text{如图, 作 } \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \text{ 则 } \angle AOB = \frac{\pi}{3},$$

连接 AB , 取 AB 的中点 D , 连接 OD ,



$$\text{则 } \vec{OD} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2},$$

$$\text{由 } (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{ 得, } (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = 0,$$

$$\therefore (\vec{c} - \vec{a}) \perp \left(\vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right),$$

$$\text{作 } \vec{OC} = \vec{c}, \text{ 连接 } AC, CD, \text{ 则 } \vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}, \vec{DC} = \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2},$$

$$\therefore AC \perp DC;$$

$\therefore C$ 点在以 AD 为直径的圆上,

$\therefore$ 当 OC 经过圆心 E 时, OC 最大, 即 $|\vec{c}|$ 最大,

$$\text{在 } \triangle AOB \text{ 中, } OA = 1, OB = 2, \angle AOB = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理得, } AB^2 = 1 + 4 - 4 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OAB = \frac{\pi}{2},$$

$$AE = CE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OE = \sqrt{1 + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{19}}{4},$$

$$\therefore OC = OE + CE = \frac{\sqrt{19} + \sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore |\vec{c}| \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{19} + \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{19} + \sqrt{3}}{4}.$$

【标注】 【知识点】向量的模；向量的数量积的定义

27. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $AB = 6$, $AC = 10$, 若 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 且 $2x + 10y = 5(x \neq 0)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .
- A. 24
B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$
C. 18
D. $20\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 取 AC 的中点 D , 则 $OD \perp AC$,

$$\text{即 } \overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AC}| \cos 0$$

$$= 5 \times 10$$

$$= 50,$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC}^2$$

$$= x|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC + y|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= 60x \cdot \cos \angle BAC + 100y,$$

$$\therefore 60x \cdot \cos \angle BAC + 100y = 50,$$

$$\therefore 2x + 10y = 5,$$

$$\therefore 60x \cdot \cos \angle BAC = 20x,$$

$$\text{又 } \because x \neq 0,$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 20\sqrt{2}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

