

第四讲-不等式证明（一）练习题

一、构造放缩式证明数列型不等式

1. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x (a \neq 0)$.

(1) 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq (a+2)x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

(2) 证明: 对 $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+2013)} > \frac{2013}{n(n+2013)}$.

2. 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax + 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $x > 0$ 时, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围 .

(2) 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 证明: $\frac{n}{2n+4} < \ln^2 2 + \ln^2 \frac{3}{2} + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

3. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x \ln x$, 函数 $g(x) = x + \frac{a}{x} - (\ln x)^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, x_0 是 $g(x)$ 的一个极值点, 且 $g(x_0) = 2$.

(1) 求实数 x_0 和 a 的值 .

(2) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2-1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x + a - 1}{x}$.

当 $a = 1$ 时, 证明:

① $xf(x) \leq x - 1$.

② 证明: $\frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \cdots + \frac{f(n)}{n} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{3}{4}$.

5. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} - a \cdot (\ln x)^2 \cdot (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x) \geq 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围 .

(2) 证明不等式 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2^k+1)(2^k+2)}} > \ln \frac{2^{n+1}}{2^n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

二、极值点偏移

6. 已知函数 $f(x) = a \ln x - bx - 3 (a \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0)$.

当 $a = 1$ 时, 设 $g(x) = f(x) + 3$, 若 $g(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 ,

求证: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

7. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x - ae^x + 1$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

证明： $e^{x_1} + e^{x_2} > 2$.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}ax - b$, $g(x) = ax^2 + bx$.

若函数 $y = f(x)$ 的两个零点分别为 x_1 , x_2 且 $x_1 \neq x_2$, 求证： $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 1$.

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

对于曲线 $y = f(x)$ 上的两个不同的点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 记直线 MN 的斜率为 k , 若

$y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 证明： $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > k$.

10. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = ax^2 + bx (a \neq 0, b \in \mathbf{R})$.

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, 记 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 记

$f'(x)$, $g'(x)$ 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数 , 证明： $f'(x_0) < g'(x_0)$.

三、凹凸函数性质

11. 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$, $a \in \mathbf{R}$.

当 $a < 0$ 时 , 设 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 试比较 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 的大小并说明理由 .

12. 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + a \ln x (x > 0)$, $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$, 对任意两个不相等的正数 x_1 , x_2 , 证明 :

当 $a \leq 0$ 时 , $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

13. 已知函数 $f(x) = kx(1 - \ln x)$, 其中 k 为非零实数 .

当 $k > 0$ 时 , 设 $x, y \in (0, +\infty)$, 证明： $f(x) + f(y) \leq 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)$.

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, 且 $x_1 \neq x_2$, 证明： $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

15. 已知函数 $f(x) = x - m \ln x$, $m \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数 .

若 $m > 0$, $0 < x_1 < x_2$, 若存在 x_0 , 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, 试比较 $x_1 + x_2$ 与 $2x_0$ 的大小 .