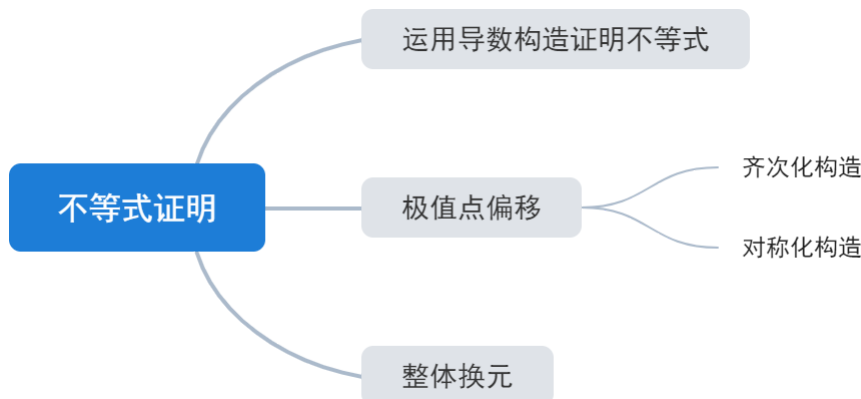


第四讲-不等式证明（一）

1. 知识梳理



一、运用导数构造证明不等式

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0，其中 $a > 0$ 。

证明 $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【答案】（1）证明见解析。

【解析】（1）当 $n = 1$ 时，不等式左边 $= 2 - \ln 3 < 2 =$ 右边，所以不等式成立

当 $n \geq 2$ 时，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2}{2i-1}\right) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{2i-1} - \ln\left(1 + \frac{2}{2i-1}\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \sum_{i=1}^n [\ln(2i+1) - \ln(2i-1)] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) \end{aligned}$$

在（2）中取 $k = \frac{1}{2}$ ，得 $f(x) \leq \frac{x^2}{2} (x \geq 0)$ ，从而

$$f\left(\frac{2}{2i-1}\right) \leq \frac{2}{(2i-1)^2} < \frac{2}{(2i-3)(2i-1)} (i \in \mathbf{N}^*, i \geq 2)$$

所以有

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2}{2i-1}\right) = f(2) + \sum_{i=2}^n f\left(\frac{2}{2i-1}\right) < 2 - \ln 3 + \sum_{i=2}^n \frac{2}{(2i-3)(2i-1)}$$

$$= 2 - \ln 3 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{2i-3} - \frac{1}{2i-1} \right) = 2 - \ln 3 + 1 - \frac{1}{2n-1} < 2.$$

综上, $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2, n \in \mathbf{N}^*.$

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；导数与极值；利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；数学归纳法；数列与不等式综合

2. 思路总结

运用导数构造证明不等式问题是高考数学导数大题中综合性较强的题型，其综合考察了导数的构造、数列的放缩、求和等知识内容，常规步骤如下：

- ①借助题目中的直接结论或者间接证明结论构造函数，运用导数知识，将函数的最值不等式转化为两个函数的大小关系的不等式；
- ②通过直接拆分或者放缩法将不等式右侧的函数进行拆分；
- ③根据题目要求的求和项数，将延伸的等项不等式组进行累加；
- ④累加后合并整理，从而证明不等关系。

3. 模拟演练

2. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828 \dots$) .

(1) 若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

(2) 求证：对任意正整数 n ，都有 $\frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \dots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}$.

【答案】 (1) $a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right]$.

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) $g'(x) = e^x - a$, $x \in [0, +\infty)$,

①当 $a \leq 1$, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增,

$\therefore g(x) \geq g(0) = 1 + 3a$,

$\therefore 1 + 3a \geq 0$, 得 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$,

②当 $a > 1$, $g(x)$ 在 $[0, \ln a)$ 上递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 递增,

$\therefore x = \ln a$ 时, $g(x)_{\min} = g(\ln a) = 4a - a \ln a$,

$\therefore 4a - a \ln a > 0$ 得 $1 < a < e^4$,

综上所述, $a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right]$.

(2) $x > 0$ 时, $e^x \geq x + 1$,

两边同时取对数得 $x \geq \ln(x+1)$, 令 $x = \frac{1}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则有 $\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}$,

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e,$$

$$\therefore \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} > \frac{1}{e},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}.$$

【标注】【知识点】导数与最值；通过构造函数证明不等式；利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的单调性、单调区间

3. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

(2) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】(1) a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $x \in [1, +\infty)$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(x) = a - \frac{a-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x - (a-1)}{x^2} = \frac{a}{x^2}(x-1)\left(x - \frac{1-a}{a}\right)$$

① 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 此时 $\frac{1-a}{a} > 1$

当 $1 < x < \frac{1-a}{a}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1-a}{a}\right]$ 上是减函数,

$\therefore$ 在 $\left(1, \frac{1-a}{a}\right)$ 上存在 x_0 ,

使得 $f(x_0) < f(1) < 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上不恒成立;

② 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} \leq 1$, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上成立,

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$f(x) \geq f(1) = 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

综上所述, 所求 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2)

由(2)知当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

$$ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x \geq 0 (x \geq 1),$$

$$\text{令 } a = \frac{1}{2}, \text{ 有 } \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \geq \ln x,$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时}, \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) > \ln x$$

$$\text{令 } x = \frac{k+1}{k}, \text{ 有}$$

$$\ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right) - \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \right]$$

$$\text{即 } \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right), k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

将上述 n 个不等式依次相加得:

$$\ln(n+1) < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2(n+1)},$$

$$\text{整理得 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \geq 1).$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间;利用导数证明不等式恒成立问题;通过构造函数证明不等式

二、极值点偏移

1. 真题分析

4. 已知函数 $f(x) = x - ae^x (a \in \mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$, 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

- (1) 求 a 的取值范围;
- (2) 证明: $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;
- (3) 证明: $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

【答案】 (1) a 的取值范围是 $(0, e^{-1})$.

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $f(x) = x - ae^x$, 可得 $f'(x) = 1 - ae^x$.

下面分两种情况讨论:

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不合题意.

② $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\ln a$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

--	--	--	--

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\ln a - 1$	$\searrow$

这时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\ln a)$; 单调递减区间是 $(-\ln a, +\infty)$.

于是, “函数 $y = f(x)$ 有两个零点”等价于如下条件同时成立:

1° $f(-\ln a) > 0$;

2° 存在 $s_1 \in (-\infty, -\ln a)$, 满足 $f(s_1) < 0$;

3° 存在 $s_2 \in (-\ln a, +\infty)$, 满足 $f(s_2) < 0$.

由 $f(-\ln a) > 0$, 得 $-\ln a - 1 > 0$, 解得 $0 < a < e^{-1}$,

而此时, 取 $s_1 = 0$, 满足 $s_1 \in (-\infty, -\ln a)$, 且 $f(s_1) = -a < 0$;

取 $s_2 = \frac{2}{a} + \ln \frac{2}{a}$, 满足 $s_2 \in (-\ln a, +\infty)$, 且

$$f(s_2) = \left(\frac{2}{a} - e^{\frac{2}{a}} \right) + \left(\ln \frac{2}{a} - e^{\frac{2}{a}} \right) < 0.$$

所以, a 的取值范围是 $(0, e^{-1})$.

(2) 证明: 由 $f(x) = x - ae^x = 0$, 得 $a = \frac{x}{e^x}$.

设 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $x < 1$, 令 $g'(x) < 0$ 得 $x > 1$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

并且, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $g(x) \leq 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$.

由已知, x_1, x_2 满足 $a = g(x_1)$, $a = g(x_2)$.

由 $a \in (0, e^{-1})$, 及 $g(x)$ 的单调性, 可得 $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$.

对于任意的 $a_1, a_2 \in (0, e^{-1})$,

设 $a_1 > a_2$, $g(\xi_1) = g(\xi_2) = a_1$, 其中 $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$; $g(\eta_1) = g(\eta_2) = a_2$, 其中 $0 < \eta_1 < 1 < \eta_2$.

因为 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

故由 $a_1 > a_2$, 即 $g(\xi_1) > g(\eta_1)$, 可得 $\xi_1 > \eta_1$; 类似可得 $\xi_2 < \eta_2$.

又由 $\xi_1, \eta_1 > 0$, 得 $\frac{\xi_2}{\xi_1} < \frac{\eta_2}{\xi_1} < \frac{\eta_2}{\eta_1}$.

所以, $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大.

(3) 证明: 由 $x_1 = ae^{x_1}$, $x_2 = ae^{x_2}$,

可得 $\ln x_1 = \ln a + x_1$, $\ln x_2 = \ln a + x_2$.

故 $x_2 - x_1 = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$.

设 $\frac{x_2}{x_1} = t$, 则 $t > 1$, 且 $\begin{cases} x_2 = tx_1 \\ x_2 - x_1 = \ln t \end{cases}$,

解得 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}$, $x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$.

所以, $x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}$ ①

令 $h(x) = \frac{(x+1)\ln x}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$,

则 $h'(x) = \frac{-2\ln x + x - \frac{1}{x}}{(x-1)^2}$.

令 $u(x) = -2\ln x + x - \frac{1}{x}$, 得 $u'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $u'(x) > 0$.

因此, $u(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故对于任意的 $x \in (1, +\infty)$, $u(x) > u(1) = 0$,

由此可得, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因此, 由①可得 $x_1 + x_2$ 随着 t 的增大而增大.

而由(2)知, t 随着 a 的减小而增大, 所以 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

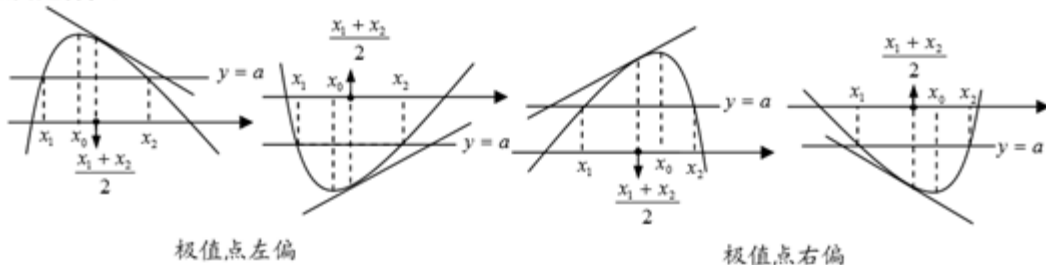
【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 双变量问题; 已知极值情况求参数范围

2. 思路总结

极值点偏移

若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时取得极值点, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的极值点为 $x = -\frac{b}{2a}$, 作直线 $y = h$ 与函数 $y = f(x)$ 交于 $A(x_1, h)$, $B(x_2, h)$ 两点, 则 AB 的中点为 $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, h)$. 对于二次函数, 极值点为 $\frac{x_1 + x_2}{2}$, 此时认为极值点居中, 没有偏离中点, 然而很多极值点, 由于极值点的左右的“增减速度”不同, 函数图象不具有对称性, 常常有极值点 $x_0 \neq \frac{x_1 + x_2}{2}$ 的情况, 出现了极值点的左右偏移. 这类问题在历年的高考与模拟题中屡见不鲜, 由于 x_0, x_1, x_2 往往不易求出, 故这类问题难度较大.

【问题特征】



对称化构造

对于有关“ $x_1 + x_2$ ”的不等式题, 一般我们采取对称化构造. 若 $x_1 + x_2 > b$, 即 $x_1 > b - x_2$, 可以把 x_1 , x_2 转化为函数的一个单调区间上, 利用函数的单调性加以证明.

齐次化构造

对于有关“ $x_1 \cdot x_2$ ”的不等式题，一般我们采取齐次化构造．若 $\frac{x_2}{x_1} = t$ 或 $x_1 \cdot x_2 = t$ ，通过已知条件，可将关于 x_1, x_2 的式子用关于 t 的式子表示，于是构造新的函数 $h(t)$ ，故将问题转化为研究 $h(t)$ 的性质，简化变量，解决问题．

3. 模拟演练

5. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ，其极值点为 x_0 ．

- (1) 求 a 的取值范围．
- (2) 求证： $x_1 + x_2 < 2x_0$ ．
- (3) 求证： $x_1 + x_2 > 2$ ．
- (4) 求证： $x_1 x_2 < 1$ ．

【答案】 (1) $a > e$ ．

(2) 证明见解析．

(3) 证明见解析．

(4) 证明见解析．

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - a$ ，若 $a \leq 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$f(x)$ 至多有一个零点，舍去；则必有 $a > 0$ ，得 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上递增，要使 $f(x)$ 有两个不同的零点，则须有 $f(\ln a) < 0 \Rightarrow a > e$ ．

(严格来讲，还需补充两处变化趋势的说明：当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$)．

故答案为： $a > e$ ．

(2) 由所证结论知这是 $f(x)$ 的极值偏移问题，选取函数 $f(x)$ 来做，下面按对称化构造三个步骤来写．

(i) $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上 $\searrow$ ，在 $(x_0, +\infty)$ 上 $\nearrow$ ，有 $x_1 < x_0 < x_2$ ；

(ii) 构造函数 $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$ ，则

$F'(x) = f'(x) + f'(2x_0 - x) = e^x - a + e^{2\ln a - x} - a = e^x + e^{2\ln a - x} - 2a$ ，当 $x < \ln a$ 时，

$F'(x) > \sqrt{e^{2\ln a}} - 2a = 0$ ，则 $F(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上 $\nearrow$ ，得 $F(x) < F(\ln a) = 0$ ，有 $f(x) < f(2x_0 - x)$ ($x < x_0 = \ln a$)．

(iii) 将 x_1 代入 II 中不等式得 $f(x_1) = f(x_2) < f(2x_0 - x_1)$ ，又 $x_2 > x_0$ ，

$2x_0 - x_1 > x_0$ ，

$f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $\nearrow$ ，故 $x_2 < 2x_0 - x_1$ ，即 $x_1 + x_2 < 2x_0$ ．

(3) 由所证结论可以看出, 这已不再是 $f(x)$ 的极值点偏移问题, 谁的极值点会是 1 呢?

回到题设条件:

$$f(x) = e^x - ax = 0 \Leftrightarrow e^x = ax \Leftrightarrow a = \frac{e^x}{x}, \text{ 记函数 } g(x) = \frac{e^x}{x}, \text{ 则有}$$

$$g(x_1) = g(x_2) = a.$$

求得 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 则 1 是 $g(x)$ 的极小值点, 我们选取函数 $g(x)$ 来证 (3) 中

结论 $x_1 + x_2 > 2$, 顺带地, 也可证 (4) 中结论 $x_1 x_2 < 1$.

(i) $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增; $g(x)$ 与 x 的符号相同; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$.

当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

由 $g(x_1) = g(x_2) = a$ 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

(ii) 构造函数 $G(x) = g(x) - g(2-x)$, 则

$$\begin{aligned} G'(x) &= g'(x) + g'(2-x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{e^{2-x}(1-x)}{(2-x)^2} = (x-1) \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2-x}}{(2-x)^2} \right) \\ &= (x-1) \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2-x}}{(2-x)^2} \right). \end{aligned}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $x-1 < 0$, 但因式 $\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2-x}}{(2-x)^2}$ 的符号不容易看出, 引出辅助

函数 $\varphi(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{e^2(x-2)}{x^3}$, 得 $\varphi(x)$ 在 $(0, 2)$ 上 $\searrow$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$2-x \in (1, 2)$, 即 $0 < x < 2-x < 2$, 则 $\varphi(x) > \varphi(2-x)$, 则

$\frac{e^2}{x^2} - \frac{e^{2-x}}{(2-x)^2} > 0$, $G'(x) < 0$, 得 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上 $\searrow$, 有 $G(x) > G(1) = 0$, 即

$g(x) > g(2-x) (0 < x < 1)$.

(iii) 将 x_1 代入 (ii) $g(x_1) = g(x_2) > g(2-x_1)$, 又 $x_2 > 1$, $2-x_1 > 1$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上 $\nearrow$, 故 $x_2 > 2-x_1$, $x_1 + x_2 > 2$.

(4) (i) 同上;

(ii) 构造函数 $G(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$, 则

$$G'(x) = g'(x) + \frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = (x-1) \cdot \frac{\left(e^x - xe^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $x-1 < 0$, 但因式 $e^x - xe^{\frac{1}{x}}$ 的符号不容易看出, 引进辅助函数

$\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$, 则 $\varphi'(x) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 得

$\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 有 $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, 则 $G'(x) > 0$, 得 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递

增, 有 $G(x) < G(1) = 0$, 即 $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right) (0 < x < 1)$;

(iii) 将 x_1 代入 (ii) 中不等式得 $g(x_1) = g(x_2) < g\left(\frac{1}{x_1}\right)$, 又 $x_2 > 1$, $\frac{1}{x_1} > 1$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 故 $x_2 < \frac{1}{x_1}$, $x_1 x_2 < 1$.

【标注】【知识点】二阶导问题；双变量问题；求参数范围（含参指对型导函数）

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.

记 $h(x) = f(x) + g(x)$, 如果 x_1, x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2 < 4x_1$, $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数, 证明: $h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) > 0$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意知,

$$h(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x \right] + \left[-\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x \right]$$

$$= 2\ln x - x^2 - ax,$$

$$h(x_1) = 2\ln x_1 - x_1^2 - ax_1 = 0, \quad h(x_2) = 2\ln x_2 - x_2^2 - ax_2 = 0,$$

$$\text{两式相减, 整理得 } 2\ln \frac{x_2}{x_1} + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = a(x_2 - x_1),$$

$$\text{所以 } a = \frac{2\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - (x_2 + x_1), \text{ 又因为 } h'(x) = \frac{2}{x} - 2x - a,$$

$$\text{所以 } h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) = \frac{6}{2x_1+x_2} - \frac{2}{3}(2x_1+x_2) - a$$

$$= -\frac{2}{x_2 - x_1} \left[\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{\frac{3}{2}\frac{x_2}{x_1} - 3}{2 + \frac{x_2}{x_1}} \right] - \frac{1}{3}(x_1 - x_2),$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} \in (1, 4), \quad \varphi(t) = \ln t - \frac{3t-3}{t+2},$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = \frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2} < 0,$$

$$\text{所以 } \varphi(t) \text{ 在 } (1, 4) \text{ 上单调递减, 故 } \varphi(t) < \varphi(1) = 0,$$

$$\text{又 } -\frac{2}{x_2 - x_1} < 0, \quad -\frac{1}{3}(x_1 - x_2) > 0, \text{ 所以 } h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) > 0.$$

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；双变量问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围；函数零点的概念

7. 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

当 $a = b = 0$ 时, 令 $H(x) = f(x) - \frac{1}{x}$, $G(x) = mx$, 若 $H(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $H(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $G(x) = mx$,

定义域是 $(0, +\infty)$,

$$\therefore \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = mx_1 \text{ ①},$$

$$\ln x_2 - \frac{1}{x_2} = mx_2 \text{ ②},$$

①+②得:

$$\ln x_1 + \ln x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = m(x_1 + x_2),$$

$$\text{即} \ln x_1 x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = m(x_1 + x_2) \text{ ③},$$

②-①得:

$$\ln x_2 - \ln x_1 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = m(x_2 - x_1),$$

$$\text{即} \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = m(x_2 - x_1) \text{ ④},$$

由③, ④得:

$$\ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_2}{x_1},$$

不妨设 $0 < x_1 < x_2$,

$$\text{记} t = \frac{x_2}{x_1} > 1,$$

$$\text{令} F(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+1}, t > 1,$$

$$\therefore F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} > 0,$$

$\therefore F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

$$\therefore F(t) = F(1) = 0,$$

$$\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\text{即} \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2},$$

$$\therefore \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2,$$

$$\therefore \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} < \ln x_1 x_2 - \frac{4 \times \sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2}$$

$$= \ln x_1 x_2 - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

$$= 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}},$$

$$\therefore 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} > 2,$$

$$\text{即} \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1,$$

$$\text{令} \omega(x) = \ln x - \frac{2}{x},$$

$$\therefore \omega'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$$

$\therefore \omega(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又} \because \ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e} = \frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{e} < 1,$$

$$\therefore \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1 > \ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e},$$

$$\text{即} \omega(\sqrt{x_1 x_2}) > \omega(\sqrt{2}e),$$

$$\therefore \sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e,$$

$$\therefore x_1 x_2 > 2e^2, \text{ 即得证.}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；双变量问题

三、双变量整体换元

1. 真题分析

8. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $f(x) = x^3 + k \ln x$, 得 $f'(x) = 3x^2 + \frac{k}{x}$,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t, (t > 1),$$

$$\begin{aligned} & \text{则 } (x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= (x_1 - x_2) \left(3x_1^2 + \frac{k}{x_1} + 3x_2^2 + \frac{k}{x_2} \right) - 2 \left(x_1^3 - x_2^3 + k \ln \frac{x_1}{x_2} \right) \\ &= x_1^3 - x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + k \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right) - 2k \ln \frac{x_1}{x_2} \\ &= x_2^3 (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \text{ ①,} \end{aligned}$$

$$\text{令 } h(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x, x \in (1, +\infty),$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 > 0,$$

由此可得 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以当 } t > 1 \text{ 时, } h(t) > h(1), \text{ 即 } t - \frac{1}{t} - 2 \ln t > 0,$$

$$\text{因为 } x_2 \geq 1, t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3 > 0, k \geq -3,$$

$$\text{所以 } x_2^3 (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right)$$

$$\begin{aligned}
 &> (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 3\left(t - \frac{1}{t} - 2\ln t\right) \\
 &= t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} - 1 \text{ ②},
 \end{aligned}$$

由(1)②可知, 当 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1)$,

$$\text{即 } t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} > 1,$$

$$\text{故 } t^3 - 3t^2 + 6\ln t + \frac{3}{t} - 1 > 0 \text{ ③},$$

由①②③可得 $(x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) > 0$,

所以, 当 $k \geq -3$ 时,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{有 } \frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

【标注】【知识点】双变量问题

2. 思路总结

一般而言对于函数中含有对数式的情形我们用 $t = \frac{x_2}{x_1}$ 整体换元, 对于含有指数式的式子, 我们采用 $t = x_2 - x_1$ 整体换元, 从而实现消元的目的。

3. 模拟演练

9. 设函数 $f(x) = (mx + n)\ln x$. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 2x - e$ (e 为自然对数的底数).

若 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 试比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 的大小, 并予以证明.

【答案】 (1) $\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号). 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 时, $\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ 等价于 } \frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2},$$

$$\text{也等价于 } \frac{a}{b} \ln \frac{2a}{b} - \left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right) + \ln 2 \geq 0.$$

不妨设 $a \geq b$,

$$\text{设 } g(x) = x \ln(2x) - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2, \quad x \in [1, +\infty),$$

$$\text{则 } g'(x) = \ln(2x) - \ln(1+x).$$

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{即 } g(x) = x \ln 2x - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2 \geq g(1) = 0,$$

故当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g(x) = x \ln 2x - (1+x) \ln(1+x) + \ln 2 \geq 0$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号) .

令 $x = \frac{a}{b} \geq 1$, 则 $g\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$,

即 $\frac{a}{b} \ln \frac{2a}{b} - (1 + \frac{a}{b}) \ln(1 + \frac{a}{b}) + \ln 2 \geq 0$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号) ,

综上所述, 当 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 时, $\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号) .

【标注】【知识点】双变量问题; 通过构造函数证明不等式; 直接求函数的单调性 (不含参)

10. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = mx^2$. $m \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数 .

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 要证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

只证 $\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} > \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$,

即证 $\frac{1 + e^{x_2 - x_1}}{2} > \frac{1 - e^{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1}$,

令 $x_2 - x_1 = t$, $t > 0$,

可得 $\frac{1 + e^t}{2} > \frac{e^t - 1}{t}$,

即 $(t-2)e^t + t + 2 > 0$,

令 $M(t) = (t-2)e^t + t + 2$, ($t > 0$),

则 $M'(t) = (t-1)e^t + 1$,

$M'(t) = te^t > 0$,

$\therefore M'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, 而 $M'(0) = 0$.

$\therefore M(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增,

即 $M(t) > M(0) = 0$,

即 $(t-2)e^t + t + 2 > 0$, 故原不等式成立.

【标注】【知识点】导数的几何意义的实际应用; 导数的几何意义; 导数与最值; 已知单调性求参数的取值范围; 利用导数证明不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式

11. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) 的极小值为 $-\frac{1}{e}$.

(1) 求 a 的值.

(2)

任取两个不等的正数 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 若存在正数 x_0 , 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立, 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.

【答案】 (1) $a = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because f(x) = ax \ln x$,

$$\therefore f'(x) = a \ln x + a, \text{ 令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{则 } x = \frac{1}{e},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{e}\right) = x \cdot \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}, \text{ 得 } a = 1.$$

(2) 由 $f(x) = x \ln x \cdot (x \in (0, +\infty))$ 得 $f'(x) = \ln x + 1$,

$$\therefore \ln x_0 + 1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\therefore \ln x_0 - \ln x_2 = \frac{\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} - \ln x_2 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} - \ln x_2 - 1$$

$$= \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1} - 1$$

$$= \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - 1} - 1.$$

$$\text{令 } \frac{x_2}{x_1} = t (t > 1).$$

$$\text{则 } h(t) = \frac{\ln t}{t} - 1 = \frac{\ln t - t + 1}{t - 1}.$$

$$\because t - 1 > 0, \text{ 只需证明 } \ln t - t + 1 < 0,$$

$$\text{令 } s(t) = \ln t - t + 1.$$

$$\text{则 } s'(t) = \frac{1}{t} - 1 < 0,$$

$$\therefore s(t) \text{ 在 } t \in (1, +\infty) \text{ 上单调递减},$$

$$\therefore s(t) < s(1) = 0,$$

$$\therefore h(t) < 0, \text{ 即 } \ln x_0 < \ln x_2.$$

$$\text{故 } x_0 < x_2.$$

$$\text{同理可证 } x_1 < x_0.$$

$$\text{故 } x_1 < x_0 < x_2.$$

【标注】【知识点】已知极值情况求函数解析式；双变量问题；通过构造函数证明不等式