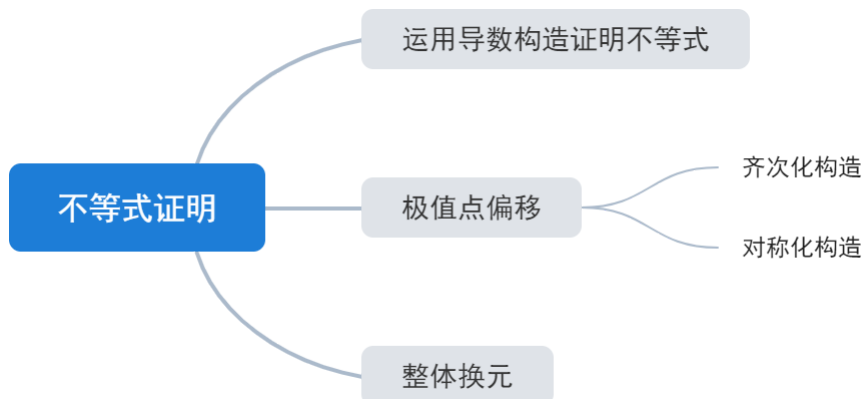


第四讲-不等式证明（一）

1. 知识梳理



一、运用导数构造证明不等式

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0，其中 $a > 0$ 。

$$\text{证明 } \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2 (n \in \mathbf{N}^*) .$$

2. 思路总结

运用导数构造证明不等式问题是高考数学导数大题中综合性较强的题型，其综合考察了导数的构造、数列的放缩、求和等知识内容，常规步骤如下：

- ①借助题目中的直接结论或者间接证明结论构造函数，运用导数知识，将函数的最值不等式转化为两个函数的大小关系的不等式；
- ②通过直接拆分或者放缩法将不等式右侧的函数进行拆分；
- ③根据题目要求的求和项数，将延伸的等项不等式组进行累加；
- ④累加后合并整理，从而证明不等关系。

3. 模拟演练

2. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$ ， $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ （其中 e 是自然对数的底数， $e = 2.71828 \dots$ ）。

(1) 若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求证: 对任意正整数 n , 都有 $\frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}$.

3. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

(2) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$.

二、极值点偏移

1. 真题分析

4. 已知函数 $f(x) = x - ae^x (a \in \mathbf{R}), x \in \mathbf{R}$, 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;

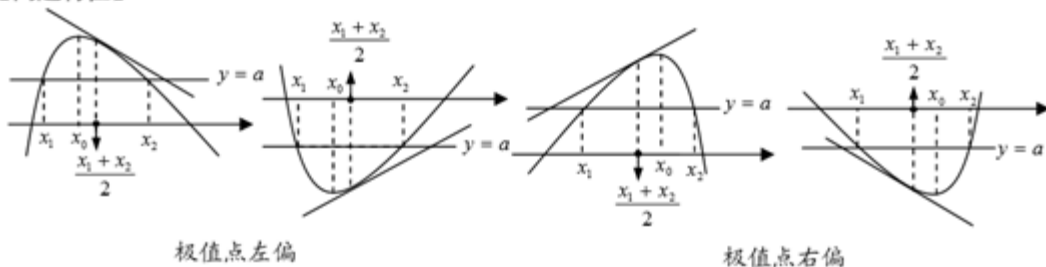
(3) 证明: $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

2. 思路总结

极值点偏移

若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时取得极值点, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的极值点为 $x = -\frac{b}{2a}$, 作直线 $y = h$ 与函数 $y = f(x)$ 交于 $A(x_1, h), B(x_2, h)$ 两点, 则 AB 的中点为 $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, h)$. 对于二次函数, 极值点为 $\frac{x_1 + x_2}{2}$, 此时认为极值点居中, 没有偏离中点, 然而很多极值点, 由于极值点的左右的“增减速度”不同, 函数图象不具有对称性, 常常有极值点 $x_0 \neq \frac{x_1 + x_2}{2}$ 的情况, 出现了极值点的左右偏移. 这类问题在历年的高考与模拟题中屡见不鲜, 由于 x_0, x_1, x_2 往往不易求出, 故这类问题难度较大.

【问题特征】



对称化构造

对于有关“ $x_1 + x_2$ ”的不等式题, 一般我们采取对称化构造. 若 $x_1 + x_2 > b$, 即 $x_1 > b - x_2$, 可以把 x_1

, x_1 转化为函数的一个单调区间上, 利用函数的单调性加以证明.

齐次化构造

对于有关“ $x_1 \cdot x_2$ ”的不等式题, 一般我们采取齐次化构造. 若 $\frac{x_2}{x_1} = t$ 或 $x_1 \cdot x_2 = t$, 通过已知条件, 可将关于 x_1, x_2 的式子用关于 t 的式子表示, 于是构造新的函数 $h(t)$, 故将问题转化为研究 $h(t)$ 的性质, 简化变量, 解决问题.

3. 模拟演练

5. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 其极值点为 x_0 .

(1) 求 a 的取值范围.

(2) 求证: $x_1 + x_2 < 2x_0$.

(3) 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

(4) 求证: $x_1 x_2 < 1$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.

记 $f(x) = f(x) + g(x)$, 如果 x_1, x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2 < 4x_1$, $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数, 证明: $h'\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}\right) > 0$.

7. 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

当 $a = b = 0$ 时, 令 $H(x) = f(x) - \frac{1}{x}$, $G(x) = mx$, 若 $H(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

三、双变量整体换元

1. 真题分析

8. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

2. 思路总结

一般而言对于函数中含有对数式的情形我们用 $t = \frac{x_2}{x_1}$ 整体换元, 对于含有指数式的式子, 我们采用 $t = x_2 - x_1$ 整体换元, 从而实现消元的目的.

3. 模拟演练

9. 设函数 $f(x) = (mx + n) \ln x$. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 2x - e$ (e 为自然对数的底数).

若 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 试比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $f(\frac{a+b}{2})$ 的大小, 并予以证明.

10. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = mx^2$. $m \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数.

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

11. 已知函数 $f(x) = ax \ln x (a \in \mathbf{R})$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$.

(1) 求 a 的值.

(2) 任取两个不等的正数 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 若存在正数 x_0 , 使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立, 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.