

第五讲-不等式证明(二) 练习题

一、利用切线进行放缩

1. 已知函数 $f(x) = xe^x - ae^{x-1}$, 且 $f'(1) = e$.

若关于 x 的方程 $f(x) = kx^2 - 2 (k > 2)$ 存在两不相等的正实数根 x_1, x_2 , 证明:

$$|x_1 - x_2| > \ln \frac{4}{e}.$$

2. 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(1) 若 $a \leq e-1$, 证明: $f(x) \geq a \ln x + 2ex - 2$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立.

(2) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{b+e+1}{3e-1} + \frac{eb}{e-1}$.

3. 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(1) 已知 $f(x) \geq ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求 a 的值.

(2) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq b + 1 + \frac{eb}{e-1}$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x \ln x - 4x + \frac{5}{2}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程 $y = h(x)$, 并证明: $f(x) \geq h(x)$.

(2) 当 $-1 < a < \frac{5}{2}$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有两个不同的实数根 x_1, x_2 , 证明: $|x_2 - x_1| < 2a + 3$.

二、利用题目所给条件进行放缩

5. 已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \cos x (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = -1$ 时, x_0 为函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的零点, 求证: $\frac{\pi}{2} - x_0 < \frac{1}{e^{x_0}(\sin x_0 - \cos x_0)}$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ae^x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

求证: 当 $x > 0$ 时, $xe^x - e \ln x > \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

7. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线方程

(2) 求证: $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

8. 设函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$ ($e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $f(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立时, 求 a 的取值范围;

(2) 证明 : 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , $\frac{x+1}{e^x}(1+x)^{\frac{1}{x}} < e$.

9. 已知函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , $f(x) > 0$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .

(2) 求证 : 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

三、综合创新

10. 已知函数 $f(x) = \lambda \ln x - e^{-x}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) .

求证 : 当 $0 > x_1 > x_2$ 时 , 都有 $e^{1-x_2} - e^{1-x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$.

11. 已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 的图象在点 $x = e$ (e 为自然对数的底数) 处的切线与直线 $3x - y - 1 = 0$ 平行 ;

(1) 若 $k \in \mathbf{Z}$, $k < \frac{f(x)}{(x-1)}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立 , 求 k 的最大值 ;

(2) 当 $n > m \geq 4$ 时 , 证明 : $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.

12. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明 : 当 $x \geq 0$ 时 , $f(x) \geq 1$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点 , 求 a 的值 .