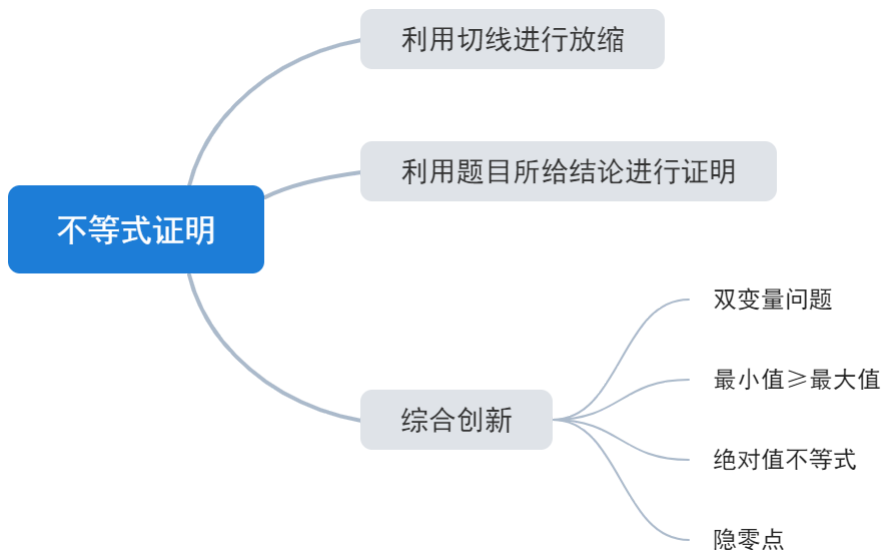


第五讲-不等式证明（二）

1. 知识梳理



一、利用切线进行放缩

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in R)$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

(1) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证 : 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = a (a \text{ 为实数})$ 有两个正实根 x_1, x_2 , 求证 : $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 答案见解析

【解析】 (1) 证明 : 设点 P 的坐标为 $(x_0, 0)$ 则 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$, $f'(x_0) = n - n^2$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = f'(x)(x - x_0)$, 即 $g(x) = f'(x)(x - x_0)$

令 $F(x) = f(x) - g(x)$,

即 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$, 则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

由于 $f'(x) = n - nx^{n-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又因为 $F'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, 所以对于任意的正实数 x , 都有 $F(x) \leq F(x_0) = 0$, 即对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$.

(2) 证明: 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 由 (II) 知 $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$, 设方程 $g(x) = a$ 的根为 x_2' ,

可得 $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$, 当 $n \geq 2$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

又由 (II) 知 $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$, 可得 $x_2 \leq x_2'$.

类似地, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y = h(x)$, 可得 $h(x) = nx$.

当 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) - h(x) = -x^n < 0$, 即对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) < h(x)$.

设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' , 可得 $x_1' = \frac{a}{n}$. 因为 $h(x) = nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

且 $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$, 因此 $x_1' < x_1$.

由此可得 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1 - n} + x_0$.

因为 $n \geq 2$, 所以 $2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$, 故

$2 \geq n^{\frac{1}{n-1}} = x_0$.

所以, $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1 - n} + 2$.

【标注】【知识点】 求函数单调区间 (含参指对型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求单调性证不等式

2. 思路总结

此类问题的一般模型为已知 $f(x) = a$ 的两根分别为 $x_1 < x_2$, 求证 $|x_2 - x_1| \leq g(a)$, 此类问题我们的处理方式是找到两条直线 (一般是切线) 满足

$x \leq$ 极大值点时, $f(x) \leq kx + m$; $x \geq$ 极大值点时, $f(x) \leq px + q$ 或者

$x \leq$ 极小值点时, $f(x) \geq kx + m$; $x \geq$ 极小值点时, $f(x) \geq px + q$, 设 x_3 , x_4 分别为 $y = a$

与 $y = kx + m$ 和 $y = px + q$ 交点的横坐标, 这样即可满足 $x_3 < x_1, x_4 > x_2$, 则有

$|x_2 - x_1| < x_4 - x_3$, 此时只要可以证明 $x_4 - x_3 \leq g(a)$ 即可。

3. 模拟演练

2. 已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$), 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e - 1 = 0$

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

【答案】 (1) $a = 1, b = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意 $f(-1) = 0$, 所以 $f(-1) = (-1+b)\left(\frac{1}{e} - a\right) = 0$,

$$\text{又 } f'(x) = (x+b+1)e^x - a,$$

$$\text{所以 } f'(-1) = \frac{b}{e} - a = -1 + \frac{1}{e},$$

若 $a = \frac{1}{e}$, 则 $b = 2 - e < 0$, 与 $b > 0$ 矛盾, 故 $a = 1, b = 1$.

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$, $f(0) = 0, f(-1) = 0$,

设 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 处的切线方程为 $h(x)$,

$$\text{易得, } h(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1), \text{ 令 } F(x) = f(x) - h(x),$$

$$\text{即 } F(x) = (x+1)(e^x - 1) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1), F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e},$$

$$\text{当 } x \leq -2 \text{ 时, } F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e} < -\frac{1}{e} < 0$$

当 $x > -2$ 时,

$$\text{设 } G(x) = F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}, G'(x) = (x+3)e^x > 0,$$

故函数 $F'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $F'(-1) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $F(x) \geq F(-1) = 0$, $f(x_1) \geq h(x_1)$,

$$\text{设 } h(x) = m \text{ 的根为 } x_1', \text{ 则 } x_1' = -1 + \frac{me}{1-e},$$

又函数 $h(x)$ 单调递减, 故 $h(x_1') = f(x_1) \geq h(x_1)$, 故 $x_1' \leq x_1$,

设 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = t(x)$, 易得 $t(x) = x$,

$$\text{令 } T(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - x,$$

$$T'(x) = (x+2)e^x - 2,$$

$$\text{当 } x \leq -2 \text{ 时, } T'(x) = (x+2)e^x - 2 < -2 < 0,$$

当 $x > -2$ 时,

$$\text{设 } H(x) = T'(x) = (x+2)e^x - 2, H'(x) = (x+3)e^x > 0,$$

故函数 $T'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $T'(x) > 0$,
 所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $T(x) \geq T(0) = 0$, $f(x_2) \geq t(x_2)$,
 设 $t(x) = m$ 的根为 x_2' , 则 $x_2' = m$,
 又函数 $t(x)$ 单调递增, 故 $t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$, 故 $x_2' \geq x_2$,
 又 $x_1' \leq x_1$,

$$x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = m - \left(-1 + \frac{me}{1-e}\right)$$

$$= 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}.$$

【标注】【知识点】双变量问题；二阶导问题；求参数范围（含参指对型导函数）

3. 已知函数 $f(x) = (x^2 - x)e^x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程.

(2) 若 $f(x) - ax + e \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若方程 $f(x) = m (m \in \mathbb{R})$ 有两个正数根 x_1, x_2 , 求证: $|x_1 - x_2| < \frac{m}{e} + m + 1$.

【答案】 (1) $x + y = 0$.

(2) $a \in [0, e]$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$.

$\therefore f'(0) = -1, f(0) = 0$, 故曲线在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $x + y = 0$.

(2) ① 当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbb{R}$;

② 当 $x > 0$ 时, 即 $a \leq (x-1)e^x + \frac{e}{x}$ 恒成立,

设 $g(x) = (x-1)e^x + \frac{e}{x} (x > 0) \Rightarrow g'(x) = x \cdot e^x - \frac{e}{x^2}$,

则 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g'(1) = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 是单减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增.

$\therefore g(x)$ 最小值为 $g(1) = e \therefore a \leq e$.

③ 当 $x < 0$ 时, 即 $a \geq (x-1)e^x + \frac{e}{x}$ 恒成立,

设 $\lambda(x) = (x-1)e^x + \frac{e}{x} (x < 0)$ 则 $\lambda(x) < 0, \lambda'(x) = xe^x - \frac{e}{x^2} < 0$,

$\therefore \lambda(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 当 $x \rightarrow 0 - \infty$ 时, $\lambda(x) \rightarrow 0$,

$\therefore a \geq 0$ 即可,

综上: $a \in [0, e]$.

(3) 依第2问有, 取 $a = e$, 有 $(x^2 - x)e^x \geq ex - e$,

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-x$,

设 $\varphi(x) = (x^2 - x)e^x + x$ ($x > 0$), 则 $\varphi'(x) = (x^2 + x - 1)e^x + 1$,

$\varphi'(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$, 令 $\varphi'(x) = 0$ 有 $x = -3$ 或 $x = 0$,

可知 $\varphi'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$, $(0, +\infty)$ 单增, 在 $(-3, 0)$ 单减,

而 $\varphi'(0) = 0$, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $y = \varphi(x)$ 单调递增,

即 $x > 0$ 时, $\varphi(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore (x^2 - x)e^x \geq -x$, 设 $y = m$ 分别与 $y = -x$, $y = e(x - 1)$ 的两个交点横坐标为 x_3 、 x_4 , 则有 $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$,

$\therefore |x_1 - x_2| < x_4 - x_3 = \frac{m}{e} + 1 + m$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的最值；导数的几何意义；求在某点处的切线方程

二、利用题目所给不等式进行放缩

1. 真题分析

4. 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(2) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 记 $h(x) = f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

依题意及 (1), 有 $g(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $h'(x) = f'(x) + g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$,

因此 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

进而 $h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,

$f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$.

(2) 依题意, $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$,
 即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$, 记 $y_n = x_n - 2n\pi$,
 则 $y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,
 且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in \mathbf{N})$,
 由 $f(y_n) = e^{-2n\pi} \leq 1 = f(y_0)$ 及 (1),
 得 $y_n \geq y_0$, 由 (2) 知,
 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,
 所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数,
 因此 $g(y_n) \leq g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,
 又由 (2) 知, $f(y_n) + g(y_n)\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) \geq 0$,
 故 $\frac{\pi}{2} - y_n \leq -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} \leq -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}$

$$= \frac{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)}{e^{-2n\pi}} < \frac{\sin x_0 - \cos x_0}{e^{-2n\pi}},$$

 所以, $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{\sin x_0 - \cos x_0}{e^{-2n\pi}}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

5. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 , $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0) < 0$.

(2) 求证: 存在大于 0 的常数 A , 使得对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$, 满足

$$\left|\frac{p}{q} - x_0\right| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 证明: 由 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$, 得 $h(m) = g(m)(m - x_0) - f(m)$,

$$h(x_0) = g(x_0)(m - x_0) - f(m).$$

令函数 $H_1(x) = g(x)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_1'(x) = g'(x)(x - x_0)$.

由 (1) 知, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0)$ 时, $H_1'(x) < 0$, $H_1(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时, $H_1'(x) > 0$, $H_1(x)$ 单调递增;

因此, 当 $x \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ 时, $H_1(x) > H_1(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_1(m) > 0$, 即 $h(m) > 0$.

令函数 $H_2(x) = g(x_0)(x - x_0) - f(x)$, 则 $H_2'(x) = g(x_0) - g(x)$.

由 (I) 知 , 当 $x \in [1, 2]$ 时 , $g'(x) > 0$,

故当 $x \in [1, x_0]$ 时 , $H_2'(x) > 0$, $H_2(x)$ 单调递增 ;

当 $x \in (x_0, 2]$ 时 , $H_2'(x) < 0$, $H_2(x)$ 单调递减 ;

因此 , 当 $x \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$ 时 , $H_2(x) < H_2(x_0) = -f(x_0) = 0$,

可得 $H_2(m) < 0$, 所以 $h(x_0) < 0$.

所以 $h(m)h(x_0) < 0$.

(2) 证明 : 对于任意的正整数 p, q , 且 $\frac{p}{q} \in [1, x_0] \cup (x_0, 2]$,

令 $m = \frac{p}{q}$, 函数 $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$.

由 (II) 知 , 当 $m \in [1, x_0]$ 时 , $h(x)$ 在区间 (m, x_0) 内有零点 ;

当 $m \in (x_0, 2]$ 时 , $h(x)$ 在区间 (x_0, m) 内有零点 .

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点 , 不妨设为 x_1 ,

则 $h(x_1) = g(x_1)(\frac{p}{q} - x_0) - f(\frac{p}{q}) = 0$.

由 (I) 知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增 , 所以 $0 < g(1) < g(x_1) < g(2)$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| = |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(x_1)}| > |\frac{f(\frac{p}{q})}{g(2)}| = \frac{|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|}{g(2)q^4}$,

因为当 $x \in [1, 2]$ 时 , $g(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增 ,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上除 x_0 外没有其他零点 , 而 $\frac{p}{q} \neq x_0$, 所以 $f(\frac{p}{q}) \neq 0$.

又因为 p, q, a 均为整数 , 所以 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4|$ 是正整数 ,

从而 $|2p^4 + 3p^3q - 3p^2q^2 - 6pq^3 - aq^4| \geq 1$,

所以 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{g(2)q^4}$. 所以 , 只要取 $A = g(2)$, 就有 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性 (不含参) ; 利用导数解决不等式能成立问题 ; 利用导数求单调性证不等式

2. 思路总结

此类问题往往会用到第二问证明的不等式结论并且结合目前要证明的不等式进行综合运用。

3. 模拟演练

6. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{e^{x-1}}$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 证明 : 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时 , $f(x) - xg(x) \geq 0$.

(2) 若 x_n 是函数 $u(x) = f(x) + 1$ 在 $(-2n\pi - \frac{\pi}{2}, -2n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}$) 内零点 , 求证 :

$$x_n + 2n\pi < \frac{\sin x_0}{e^{2n\pi}(\cos x_0 - \sin x_0)} .$$

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,

$$\therefore g(x) = f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^{x-1}},$$

$$\text{即证: } \frac{\sin x}{e^{x-1}} - x \frac{\cos x - \sin x}{e^{x-1}} \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

$$\Leftrightarrow \sin x - x(\cos x - \sin x) \geq 0,$$

$$\text{也即: } (x+1)\sin x - x\cos x \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

$$\text{注意到: } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right] \text{ 时, } \begin{cases} (x+1)\sin x \geq 0 \\ -x\cos x \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right] \text{ 时上述不等式恒成立,}$$

则只需证明: $x \in (-1, 0]$ 时, 成立即可.

① $x = 0$ 时, $0 \geq 0$ 成立.

$$\text{② } x \in (-1, 0) \text{ 时, } \Leftrightarrow \text{证明: } \tan x - \frac{x}{x+1} \geq 0,$$

$$\text{令 } h(x) = \tan x - \frac{x}{x+1}, x \in (-1, 0).$$

$$\begin{aligned} \text{则 } h'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - \cos^2 x}{\cos^2 x (x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1+\cos x)(x+1-\cos x)}{\cos^2 x (x+1)^2}, x \in (-1, 0), \end{aligned}$$

$$\text{注意到: } x \in (-1, 0) \text{ 时, } \begin{cases} x+1 > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}, \text{ 则 } x+1+\cos x > 0,$$

$$\text{令 } \varphi(x) = x+1-\cos x, x \in (-1, 0),$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = 1 + \sin x > 0, \forall x \in (-1, 0) \text{ 恒成立.}$$

$\therefore \varphi(x)$ 单调递增,

$$\Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow h'(x) < 0, \forall x \in (-1, 0) \text{ 恒成立.}$$

则 $h(x)$ 在 $x \in (-1, 0)$ 单调递减,

$$\therefore h(x) > h(0) = 0.$$

综上所述, 原不等式恒成立, 证毕.

(2) 记 $y_n = x_n + 2n\pi$, 则 $y_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 且 $y_0 = x_0$,

$$\text{则 } \Leftrightarrow \text{证明: } y_n < \frac{\sin y_0}{e^{2n\pi}(\cos y_0 - \sin y_0)},$$

$$\text{由 (1) 有, 当 } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ 时, 有 } x < \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$\therefore y_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$\therefore y_n \in \frac{f(y_n)}{g(y_n)}, \text{ 只需证: } \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \leq \frac{\sin y_0}{e^{2n\pi}(\cos y_0 - \sin y_0)}.$$

$$\text{一方面: } f(y_n) = \frac{\sin y_0}{e^{y_n-1}} = \frac{\sin(x_n + 2n\pi)}{e^{x_n+2n\pi-1}} = \frac{\sin x_n}{e^{x_n-1} \cdot e^{2n\pi}},$$

又 $f(x_n) = -1$,
 $\therefore f(y_n) = -\frac{1}{e^{2n\pi}} \geq -1 = f(x_0) = f(y_0)$,
 又 $\because g(x) = f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^{x-1}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,
 $\therefore f(x)$ 在 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 单调递增 .
 $\therefore y_n \geq y_0$.
 另一方面 : $g'(x) = \frac{(-\sin x - \cos x)e^{x-1} - e^{x-1}(\cos x - \sin x)}{e^{2(x-1)}}$
 $= \frac{-2\cos x}{e^{x-1}} < 0$,
 $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 恒成立 ,
 $\therefore g(x)$ 在 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 单调递减 ,
 $\therefore g(y_n) \leq g(y_0)$,
 则 $y_n < \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \frac{-\frac{1}{e^{2n\pi}}}{\frac{\cos y_n - \sin y_n}{e^{y_n-1}}}$
 $\leq \frac{\frac{1}{-e^{2n\pi}}}{\frac{\cos y_0 - \sin y_0}{e^{y_0-1}}} = \frac{-e^{y_0-1}}{e^{2n\pi}(\cos y_0 - \sin y_0)}$.
 要证 : $\frac{f(y_n)}{g(y_n)} \leq \frac{\sin y_0}{e^{2n\pi}(\cos y_0 - \sin y_0)}$.
 $\Leftrightarrow$ 证明 : $-e^{y_0-1} \leq \sin y_0$
 $\Leftrightarrow \frac{\sin y_0}{e^{y_0-1}} \geq -1$,
 而这是显然成立的 ,
 $\therefore f(y_0) = f(x_0) = -1$.
 综上所述 : 原不等式得证 , 证毕 .

【标注】【知识点】二阶导问题；利用导数证明不等式恒成立问题；导数与最值

7. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.
- (1) 当 $x \geq 0$ 时 , 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .
- (2) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$.

【答案】 (1) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$,

令 $h(x) = e^x - 1 - 2ax$, 则 $h'(x) = e^x - 2a$,

① 当 $2a \leq 1$ 时 , 在 $[0, +\infty)$ 上 , $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 递增 , $h(x) \geq h(0)$,

即 $f'(x) \geq f'(0) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为增函数,

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$,

$\therefore a \leq \frac{1}{2}$ 时满足条件;

② 当 $2a > 1$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2a$,

当 $x \in [0, \ln 2a)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore x \in [0, \ln 2a)$ 时, 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < f'(0) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, \ln 2a)$ 为减函数,

$\therefore f(x) < f(0) = 0$, 不合题意,

综上得实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 由 (2) 得, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x > 0$, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

即 $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}$,

欲证不等式 $(e^x - 1) \ln(x+1) > x^2$, 只需证 $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$,

设 $F(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$,

则 $F'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$,

$\therefore x > 0$ 时, $F'(x) > 0$ 恒成立, 且 $F(0) = 0$,

$\therefore F(x) > 0$ 恒成立,

所以原不等式得证.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 二阶导问题

三、综合创新

双变量问题

8. 设函数 $f(x) = x - a(x+1) \ln(x+1) (a \geq 0)$.

证明: 当 $m > n > 0$ 时, $(1+m)^n < (1+n)^m$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 要证当 $m > n > 0$ 时, $(1+m)^n < (1+n)^m$,

即证当 $m > n > 0$ 时, $\ln[(1+m)^n] < \ln[(1+n)^m]$,

即证当 $m > n > 0$ 时, $\frac{\ln(1+m)}{m} < \frac{\ln(1+n)}{n}$,

$\because x \in (0, +\infty)$, 设 $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
 则 $g'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$,
 设 $h(x) = x - (x-1)\ln(x+1)$,
 则 $h'(x) = -\ln(x+1) < 0$,
 $\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(x) < h(0) = 0$,
 $\therefore g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore$ 当 $m > n > 0$ 时, $\frac{\ln(1+m)}{m} < \frac{\ln(1+n)}{n}$ 成立,
 即原不等式成立.

【标注】【知识点】二阶导问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围

9. 已知函数 $f(x) = e^{-2x} + a \ln x$, 其中 e 为自然对数的底数, $a \in \mathbf{R}$.

当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 证明: $e^{1-2x_2} - e^{1-2x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (1) 知: 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $\frac{1}{e} \geq 2xe^{-2x}$ 成立, 即 $f'(x) \geq 0$ 成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 有 $e^{-2x_1} + \frac{1}{e} \ln x_1 < e^{-2x_2} + \frac{1}{e} \ln x_2$, 即
 $e^{1-2x_1} + \ln x_1 < e^{1-2x_2} + \ln x_2$,
 所以有 $\ln x_1 - \ln x_2 < e^{1-2x_2} - e^{1-2x_1}$,
 则证 $e^{1-2x_2} - e^{1-2x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$, 只需证 $\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$ 成立;
 设 $\frac{x_1}{x_2} = t (0 < t < 1)$, 即证 $\ln t > 1 - \frac{1}{t}$ 成立.
 设 $\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}$,
 所以 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 则 $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$. 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$ 成立,
 所以 $e^{1-2x_2} - e^{1-2x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$ 成立.

【标注】【知识点】函数零点的概念；导数与最值；利用导数求函数的零点及个数；双变量问题

最小值≥最大值模型

10. 已知函数 $f(x) = e^{-x}(\ln x - 2k)$ (k 为常数, $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴垂直.

设 $g(x) = \frac{1 - x(\ln x + 1)}{e^x}$, 对任意 $x > 0$, 证明: $(x+1)g(x) < e^x + e^{x-2}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 因为 $x > 0$,

要证原式成立即证 $\frac{g(x)}{e^x} < \frac{1 + e^{-2}}{x+1}$ 成立,

现证明: 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$ 恒成立,

当 $x \geq 1$ 时,

由 (1) 知 $g(x) \leq 0 < 1 + e^{-2}$ 成立,

当 $0 < x < 1$ 时, $e^x > 1$,

且由 (1) 知 $g(x) > 0$,

$\therefore g(x) = \frac{1 - x \ln x - x}{e^x} < 1 - x \ln x - x$,

设 $F(x) = 1 - x \ln x - x$, $x \in (0, 1)$,

则 $F'(x) = -(\ln x + 2)$,

当 $x \in (0, e^{-2})$ 时,

$F'(x) > 0$,

当 $x \in (e^{-2}, 1)$ 时,

$F'(x) < 0$,

所以当 $x = e^{-2}$ 时, $F(x)$ 取得最大值 $F(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$,

所以 $g(x) < F(x) \leq 1 + e^{-2}$,

即 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 1 + e^{-2}$.

综上所述, 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$. ①

令 $G(x) = e^x - x - 1 (x > 0)$,

则 $G'(x) = e^x - 1 > 0$ 恒成立,

所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

令 $G(x) > G(0) = 0$ 恒成立,

即 $e^x > x + 1 > 0$,

即 $0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x+1}$. ②

当 $x \geq 1$ 时,

有 $\frac{g(x)}{e^x} \leq 0 < \frac{1 + e^{-2}}{x+1}$,

当 $0 < x < 1$ 时,

由 ①② 式, $\frac{g(x)}{e^x} < \frac{1 + e^{-2}}{x+1}$,

综上所述, $x > 0$ 时, $\frac{g(x)}{e^x} < \frac{1 + e^{-2}}{x+1}$ 成立, 故原不等式成立.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；求函数单调区间（含参指对型导函数）

绝对值不等式

11. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;

(2) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 $f'(x_0) = 0$ 得 $3(x_0 - 1)^2 = a$,

$$\therefore f(x_0) = (x_0 - 1)^3 - 3(x_0 - 1)^2 x_0 - b = (x_0 - 1)^2 (-2x_0 - 1) - b,$$

$$f(3 - 2x_0) = (2 - 2x_0)^3 - 3(x_0 - 1)^2 (3 - 2x_0) - b$$

$$= (x_0 - 1)^2 (8 - 8x_0 - 9 + 6x_0) - b$$

$$= (x_0 - 1)^2 (-2x_0 - 1) - b$$

$$\therefore f(3 - 2x_0) = f(x_0) = f(x_1),$$

$$\therefore x_1 + 2x_0 = 3.$$

(2) 欲证 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$, 只需证在区间 $[0, 2]$ 上存在 x_1, x_2 , 使得

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \frac{1}{2} \text{ 即可.}$$

① 当 $a \geq 3$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,

$$f(2) = 1 - 2a - b, \quad f(0) = -1 - b,$$

$$f(0) - f(2) = 2a - 2 \geq 4 > \frac{1}{2}, \text{ 成立.}$$

② 当 $0 < a < 3$ 时,

$$f\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - b = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a + a\sqrt{\frac{a}{3}} - b = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} - a - b$$

$$f\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - b = -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} - a - b,$$

$$\therefore f(2) = 1 - 2a - b, \quad f(0) = -1 - b,$$

$$\therefore f(2) - f(0) = 2 - 2a,$$

$$\text{当 } 0 < a \leq \frac{3}{4} \text{ 时, } f(2) - f(0) = 2 - 2a \geq \frac{1}{2}, \text{ 成立,}$$

$$\text{当 } a > \frac{3}{4} \text{ 时, } f\left(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) - f\left(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} > \frac{1}{2}, \text{ 成立.}$$

综上所述: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）；求函数单调区间（含参二次型导函数）

 隐零点问题

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

【答案】 (1) $m=1$; $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为减函数; 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点 ,
 $\therefore f'(0) = 1 - \frac{1}{m} = 0$, 解得 $m=1$.

所以函数 $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, 其定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1} .$$

设 $g(x) = e^x(x+1) - 1$, 则 $g'(x) = e^x(x+1) + e^x > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数,

又 $\because g(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 0$ 时,
 $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为减函数; 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 .

故答案为: $m=1$; $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为减函数; 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 .

(2) 当 $m \leq 2$, $x \in (-m, +\infty)$ 时, $\ln(x+m) \leq \ln(x+2)$,

故只需证明当 $m=2$ 时 $f(x) > 0$. 当 $m=2$ 时, $f(x) = e^x - \ln(x+2)$,

令 $g(x) = e^x - (x+1)$, $h(x) = (x+1) - \ln(x+2)$, $f(x) = g(x) + h(x)$

$g'(x) = e^x - 1$, 令 $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $g(x) \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$, 令 $h'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, $h(x)$ 在 $(-2, -1)$ 单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $h(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = -1$ 时等号成立,

故 $f(x) = g(x) + h(x) > 0$. 综上, 当 $m \leq 2$ 时, $f(x) > 0$.

【标注】【知识点】利用导数求单调性证不等式; 导数与最值