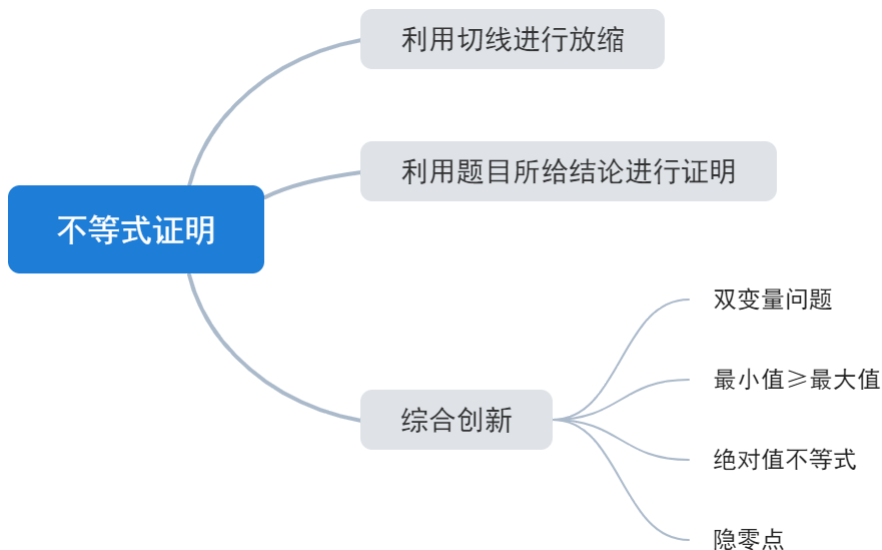


# 第五讲-不等式证明（二）

## 1. 知识梳理



## 一、利用切线进行放缩

### 1. 真题分析

1. 已知函数  $f(x) = nx - x^n (x \in R)$  , 其中  $n \in \mathbf{N}^*$  ,  $n \geq 2$  .

( 1 ) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$  , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$  , 求证 : 对于任意的正实数  $x$  , 都有  $f(x) \leq g(x)$  ;

( 2 ) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  ( $a$  为实数) 有两个正实根  $x_1$ 、 $x_2$  , 求证 :  $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$  .

### 2. 思路总结

此类问题的一般模型为已知  $f(x) = a$  的两根分别为  $x_1 < x_2$  , 求证  $|x_2 - x_1| \leq g(a)$  , 此类问题我们的处理方式是找到两条直线 ( 一般是切线 ) 满足

$x \leq$  极大值点时 ,  $f(x) \leq kx + m$  ;  $x \geq$  极大值点时 ,  $f(x) \leq px + q$  或者

$x \leq$  极小值点时 ,  $f(x) \geq kx + m$  ;  $x \geq$  极小值点时 ,  $f(x) \geq px + q$  , 设  $x_3$  ,  $x_4$  分别为  $y = a$

与  $y = kx + m$  和  $y = px + q$  交点的横坐标 , 这样即可满足  $x_3 < x_1$  ,  $x_4 > x_2$  , 则有

$|x_2 - x_1| < x_4 - x_3$  , 此时只要可以证明  $x_4 - x_3 \leq g(a)$  即可。

### 3. 模拟演练

2. 已知函数  $f(x) = (x+b)(e^x - a)$ , ( $b > 0$ ), 在  $(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $(e-1)x + ey + e - 1 = 0$ .

(1) 求  $a, b$ .

(2) 若方程  $f(x) = m$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 证明:  $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$ .

3. 已知函数  $f(x) = (x^2 - x)e^x$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在原点处的切线方程.

(2) 若  $f(x) - ax + e \geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

(3) 若方程  $f(x) = m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) 有两个正数根  $x_1, x_2$ , 求证:  $|x_1 - x_2| < \frac{m}{e} + m + 1$ .

## 二、利用题目所给不等式进行放缩

### 1. 真题分析

4. 设函数  $f(x) = e^x \cos x$ ,  $g(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(1) 当  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  时, 证明  $f(x) + g(x)(\frac{\pi}{2} - x) \geq 0$ .

(2) 设  $x_n$  为函数  $u(x) = f(x) - 1$  在区间  $(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2})$  内的零点, 其中  $n \in \mathbb{N}$ , 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

5. 设  $a \in \mathbb{Z}$ , 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$  在区间  $(1, 2)$  内有一个零点  $x_0$ ,

$g(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(1) 设  $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ , 函数  $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$ , 求证:  $h(m)h(x_0) < 0$ .

(2) 求证: 存在大于 0 的常数  $A$ , 使得对于任意的正整数  $p, q$ , 且  $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ , 满足

$$|\frac{p}{q} - x_0| \geq \frac{1}{Aq^4}.$$

### 2. 思路总结

此类问题往往会用到第二问证明的不等式结论并且结合目前要证明的不等式进行综合运用.

### 3. 模拟演练

6. 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x}{e^{x-1}}$ ,  $g(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(1) 证明: 当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  时,  $f(x) - xg(x) \geq 0$ .

(2)

若 $x_n$ 是函数 $u(x) = f(x) + 1$ 在 $\left(-2n\pi - \frac{\pi}{2}, -2n\pi\right) (n \in \mathbf{N})$ 内零点, 求证:  

$$x_n + 2n\pi < \frac{\sin x_0}{e^{2n\pi}(\cos x_0 - \sin x_0)}.$$

7. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$ .

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 $a$ 的取值范围.

(2) 若 $x > 0$ , 证明 $(e^x - 1)\ln(x + 1) > x^2$ .

### 三、综合创新

#### 🔗 双变量问题

8. 设函数 $f(x) = x - a(x + 1)\ln(x + 1) (a \geq 0)$ .

证明: 当 $m > n > 0$ 时,  $(1 + m)^n < (1 + n)^m$ .

9. 已知函数 $f(x) = e^{-2x} + a \ln x$ , 其中 $e$ 为自然对数的底数,  $a \in \mathbf{R}$ .

当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 证明:  $e^{1-2x_2} - e^{1-2x_1} > 1 - \frac{x_2}{x_1}$ .

#### 🔗 最小值 $\geq$ 最大值模型

10. 已知函数 $f(x) = e^{-x}(\ln x - 2k)$  ( $k$ 为常数,  $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 $y$ 轴垂直.

设 $g(x) = \frac{1 - x(\ln x + 1)}{e^x}$ , 对任意 $x > 0$ , 证明:  $(x + 1)g(x) < e^x + e^{x-2}$ .

#### 🔗 绝对值不等式

11. 设函数 $f(x) = (x - 1)^3 - ax - b$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中 $a, b \in \mathbf{R}$ .

(1) 若 $f(x)$ 存在极值点 $x_0$ , 且 $f(x_1) = f(x_0)$ , 其中 $x_1 \neq x_0$ , 求证:  $x_1 + 2x_0 = 3$ ;

(2) 设 $a > 0$ , 函数 $g(x) = |f(x)|$ , 求证:  $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$ .

#### 🔗 隐零点问题

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$ .

(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 $m$ , 并讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$ .