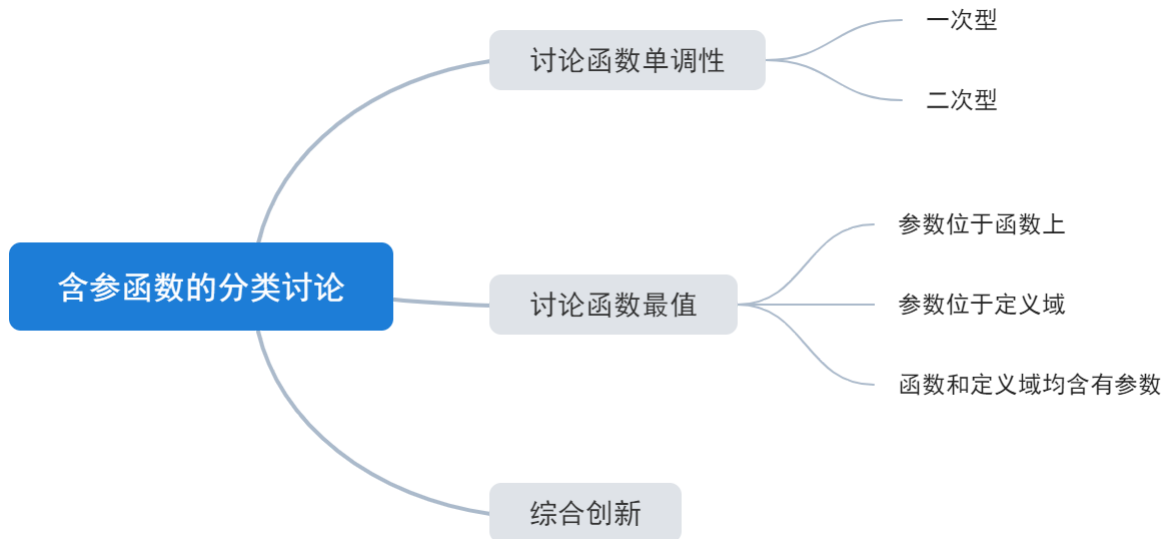


第二讲-含参函数的分类讨论

1. 知识梳理



一、含参函数的单调性

1. 真题分析

1. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) ① $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增;

② $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递增,
在 $(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $f'(x) = 3(x-1)^2 - a$,

① $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增;

② $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{\frac{a}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{a}{3}})$ 上单调
递减, 在 $(1 + \sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】 【知识点】求函数最值 (含参二次型导函数); 求函数单调区间 (含参二次型导函数)

2. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1, x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.

当 $t \neq 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) (i) 若 $t < 0$, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, \frac{t}{2}), (-t, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{t}{2}, -t)$.

(ii) 若 $t > 0$, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -t), (\frac{t}{2}, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-t, \frac{t}{2})$.

【解析】 (1) $f'(x) = 12x^2 + 6tx - 6t^2$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -t$ 或 $x = \frac{t}{2}$.

因为 $t \neq 0$, 以下分两种情况讨论:

(1) 若 $t < 0$, 则 $\frac{t}{2} < -t$, 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, \frac{t}{2})$	$\frac{t}{2}$	$(\frac{t}{2}, -t)$	$-t$	$(-t, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, \frac{t}{2}), (-t, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{t}{2}, -t)$.

(2) 若 $t > 0$, 则 $-t < \frac{t}{2}$, 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -t)$	$-t$	$(-t, \frac{t}{2})$	$\frac{t}{2}$	$(\frac{t}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -t), (\frac{t}{2}, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-t, \frac{t}{2})$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】 求在某点处的切线方程; 求函数单调区间 (含参二次型导函数); 求函数零点 (含参二次型导函数)

3. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - ax^2, x > 0$. ($f(x)$ 的图像连续不断)

求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,
令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$	$\frac{\sqrt{2a}}{2a}$	$(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

所以, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$.

【标注】【知识点】隐零点问题; 利用导数求单调性证不等式

2. 思路总结

含参函数单调性讨论思路:

- 1、确定函数的定义域;
- 2、求导并且确定需要讨论部分以及其类型; 即 $f'(x) = e^x(x^2 - 2ax - 3a^2)$ 需要讨论部分为 $x^2 - 2ax - 3a^2$, 其类型为参数不在二次项系数上且可因式分解的类型
- 3、按照各种类型的讨论思路结合定义域进行讨论; 讨论时需要考虑的点有定义域、开口方向、导数是否有零点、导数零点大小等等
- 4、写出单调区间以及极值情况;

3. 模拟演练

4. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

【解析】 (1) 由 $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$ ($x > 0$),
当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 解得: $x = \frac{1}{a}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化情况如下表:

	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$

$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	递减		递增

由表可知： $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上是单调减函数，

在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上是单调增函数，

所以，当 $a > 0$ 时，

$f(x)$ 的单调减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ ，单调增区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 。

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；求函数单调区间（含参一次型导函数）

5. 设函数 $f(x) = \frac{1-a}{2}x^2 + ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$ 。

当 $a > 1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

【答案】（1）当 $1 < a < 2$ 时， $(0, 1)$ 和 $\left(\frac{1}{a-1}, +\infty\right)$ 单调递减， $\left(1, \frac{1}{a-1}\right)$ 单调递增。

当 $a = 2$ 时， $(0, +\infty)$ 单调递减，

当 $a > 2$ 时， $\left(0, \frac{1}{a-1}\right)$ ， $(1, +\infty)$ 单调递减， $\left(\frac{1}{a-1}, 1\right)$ 单调递增。

【解析】（1）当 $a > 1$ 时， $f(x) = \frac{1-a}{2}x^2 + ax - \ln x$ ，

$$f'(x) = (1-a)x + a - \frac{1}{x} = \frac{(1-a)x^2 + ax - 1}{x}$$

$$= \frac{(1-a)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)(x-1)}{x},$$

当 $1 < a < 2$ 时， $(0, 1)$ 和 $\left(\frac{1}{a-1}, +\infty\right)$ 单调递减， $\left(1, \frac{1}{a-1}\right)$ 单调递增。

当 $a = 2$ 时， $(0, +\infty)$ 单调递减，

当 $a > 2$ 时， $\left(0, \frac{1}{a-1}\right)$ ， $(1, +\infty)$ 单调递减， $\left(\frac{1}{a-1}, 1\right)$ 单调递增。

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；求函数单调区间（含参二次型导函数）

6. 已知函数 $f(x) = \ln(ex) + \frac{1}{2}ax^2 + (a+1)x$ （ e 为自然对数的底数）。

讨论 $f(x)$ 的单调性。

【答案】（1）当 $a \geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递减。

【解析】(1) 易得 $f'(x) = \frac{1}{x} + ax + a + 1 = \frac{ax^2 + (a+1)x + 1}{x} = \frac{(ax+1)(x+1)}{x} (x > 0)$

①当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

②当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$,

则当 $0 < x < -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增;

当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

③当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 求在某点处的切线方程; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数解决不等式恒成立问题

7. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2 \ln x (a > 0)$.

讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】(1) $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内为单调增函数,

$0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-\sqrt{1-a}}{a})$, $(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty)$ 内为单调增函数, 在 $(\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a})$ 递减.

【解析】(1) 原函数定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore f'(x) = \frac{ax^2 - 2x + a}{x^2}$,

$\because a > 0$, 设 $g(x) = ax^2 - 2x + a (x \in (0, +\infty))$

由题意知 $\Delta = 4 - 4a^2 \leq 0$, $\therefore a \geq 1$.

即 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内为单调增函数,

$0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-\sqrt{1-a}}{a})$, $(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}, +\infty)$ 内为单调增函数, 在 $(\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a})$ 递减.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题; 求函数单调区间 (含参二次型导函数)

8. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减;

当 $0 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $\left(1, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty\right)$ 内单调递增;

当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递增, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, 1\right)$ 内单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = a - \frac{a}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{(ax^2 - 2)(x - 1)}{x^3}.$$

当 $a \leq 0$, $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{a(x-1)}{x^3} \left(x + \sqrt{\frac{2}{a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{2}{a}}\right).$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 0 < a < 2 \text{ 时, } \sqrt{\frac{2}{a}} > 1.$$

当 $x \in (0, 1)$ 或 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(1, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } a = 2 \text{ 时, } \sqrt{\frac{2}{a}} = 1.$$

在 $x \in (0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$\textcircled{3} \text{ 当 } a > 2 \text{ 时, } 0 < \sqrt{\frac{2}{a}} < 1.$$

当 $x \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 或 $(1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{a}}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述,

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减;

当 $0 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $\left(1, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, +\infty\right)$ 内单调递增;

当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 内单调递增, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, 1\right)$ 内单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；通过构造函数证明不等式；利用导数求函数的单调性、单调区间

9. 已知 $a \neq 0$ ，函数 $f(x) = |e^x - e| + e^x + ax$.
讨论 $f(x)$ 的单调性 .

【答案】 (1) 当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $-2e \leq a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，在 $(1, +\infty)$ 单调递增；

当 $a < -2e$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 单调递减，在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 单调递增 .

【解析】 (1) $f(x) = \begin{cases} ax + e, & x < 1 \\ 2e^x + ax - e, & x \geq 1 \end{cases}, \therefore f'(x) = \begin{cases} a, & x < 1 \\ 2e^x + a, & x \geq 1 \end{cases}$

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

当 $a < 0$ 时，考虑 $x \geq 1$ 时，令 $f'(x) > 0$ 得 $e^x > -\frac{a}{2}$ 即 $x > \ln(-\frac{a}{2})$ ，

① $\ln(-\frac{a}{2}) \leq 1$ 得 $-2e \leq a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

② $\ln(-\frac{a}{2}) > 1$ 得 $a < -2e$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 单调递减，在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 单调递增 .

综上：当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $-2e \leq a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减，在 $(1, +\infty)$ 单调递增；

当 $a < -2e$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-\frac{a}{2}))$ 单调递减，在 $(\ln(-\frac{a}{2}), +\infty)$ 单调递增 .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；利用导数证明不等式恒成立问题

二、含参函数的最值

1. 真题分析

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，其中 $a > 0$.

当 $a = 1$ 时，设函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+3]$ 上的最大值为 $M(t)$ ，最小值为 $m(t)$ ，记

$g(t) = M(t) - m(t)$ ，求函数 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值 .

【答案】 (1)

$$\frac{4}{3}.$$

【解析】(1) $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$,

由(I)知 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上单调递增,

在 $[-1, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 2]$ 上单调递增.

(1) 当 $t \in [-3, -2]$ 时, $t + 3 \in [0, 1]$, $-1 \in [t, t + 3]$,

$f(x)$ 在 $[t, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, t + 3]$ 上单调递减,

因此, $f(x)$ 在 $[t, t + 3]$ 上的最大值 $M(t) = f(-1) = -\frac{1}{3}$,

而最小值 $m(t)$ 为 $f(t)$ 与 $f(t + 3)$ 中的较小者,

由 $f(t + 3) - f(t) = 3(t + 1)(t + 2)$ 知,

当 $t \in [-3, -2]$ 时, $f(t) \leq f(t + 3)$, 故 $m(t) = f(t)$,

所以 $g(t) = f(-1) - f(t)$, 而 $f(t)$ 在 $[-3, -2]$ 上单调递增,

因此 $f(t) \leq f(-2) = -\frac{5}{3}$,

所以 $g(t)$ 在 $[-3, -2]$ 上的最小值为 $g(-2) = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

(2) 当 $t \in [-2, -1]$ 时, $t + 3 \in [1, 2]$, 且 $-1, 1 \in [t, t + 3]$.

下面比较 $f(-1), f(1), f(t), f(t + 3)$ 的大小.

由 $f(x)$ 在 $[-2, -1], [1, 2]$ 上单调递增, 有

$f(-2) \leq f(t) \leq f(-1)$.

$f(1) \leq f(t + 3) \leq f(2)$.

又由 $f(1) = f(-2) = -\frac{5}{3}, f(-1) = f(2) = -\frac{1}{3}$, 从而

$M(t) = f(-1) = -\frac{1}{3}, m(t) = f(1) = -\frac{5}{3}$.

所以 $g(t) = M(t) - m(t) = \frac{4}{3}$.

综上, 函数 $g(t)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的最小值为 $\frac{4}{3}$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参); 求参数范围(含参二次型导函数)

2. 思路总结

含参函数最值讨论思路:

1、求导并且讨论函数单调性;

2、结合每种情况的单调性写出函数的最小值和最大值; 如果函数取得最大值或者最小值有两种情况时, 需要分别算出两处函数值作比较确定最大值或者最小值

3. 模拟演练

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)$, 其中 $a > 0$.

讨论并求出函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最大值.

【答案】 (1) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = 1 - ea + a$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)_{\max} = -\ln a - 1 + a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)_{\max} = -1 - \frac{1}{e} + a$.

【解析】 (1) $\because f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$,

① 若 $\frac{1}{a} \geq e$, 即 $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$, 则当 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ 时, 有 $f'(x) \geq 0$.

② $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递增, 则 $f(x)_{\max} = f(e) = 1 - ea + a$.

③ 若 $\frac{1}{e} < \frac{1}{a} < e$, 即 $\frac{1}{e} < a < e$, 则函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, e\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1 + a$.

④ 若 $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{e}$, 即 $a \geq e$, 则当 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ 时, 有 $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \frac{a}{e} + a$.

综上得, 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = 1 - ea + a$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)_{\max} = -\ln a - 1 + a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)_{\max} = -1 - \frac{1}{e} + a$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参一次型导函数)

12. 设函数 $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b$ ($a > 0$), 其中 e 是自然对数的底数.

求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的最小值.

【答案】 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $2 + b$;

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $a + \frac{1}{a} + b$.

【解析】 (1) $f'(x) = ae^x - \frac{1}{ae^x}$,

当 $f'(x) > 0$, 即 $x > -\ln a$ 时, $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上递增;

当 $f'(x) < 0$, 即 $x < -\ln a$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上递减;

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $-\ln a > 0$, $f(x)$ 在 $(0, -\ln a)$ 上递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上递增, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(-\ln a) = 2 + b$;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, $-\ln a \leq 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0) = a + \frac{1}{a} + b$.

【标注】【知识点】已知切线方程求参数; 利用导数证明不等式能成立问题; 利用导数求函数的最值

13. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

令 $g(x) = f(x) - x^2$, 是否存在实数 a , 当 $x \in (0, e]$ (e 是自然常数) 时, 函数 $g(x)$ 的最小值是 3, 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由;

【答案】 (1) 存在实数 $a = e^2$, 理由见解析.

【解析】 (1) 假设存在实数 a , 使 $g(x) = ax - \ln x (x \in (0, e])$ 有最小值 3,

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x},$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$, $a = \frac{4}{e}$ (舍去),

② 当 $0 < \frac{1}{a} < e$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, e]$ 上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a = 3$, $a = e^2$, 满足条件.

③ 当 $\frac{1}{a} \geq e$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$, $a = \frac{4}{e}$ (舍去),

综上, 存在实数 $a = e^2$, 使得当 $x \in (0, e]$ 时 $g(x)$ 有最小值 3.

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围; 利用导数求函数的最值; 通过构造函数证明不等式

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = (-x^2 + ax - 3)e^x$ (其中 a 实数, e 是自然对数的底数).

求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+2] (t > 0)$ 上的最小值.

【答案】 (1) 答案见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = \ln x + 1$,

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{e},$$

① 当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $(t, t+2)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

所以 $f(x)_{\min} = f(t) = t \ln t$,

② 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $(t, \frac{1}{e})$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数,

在区间 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程; 导数的几何意义; 利用导数求函数的最值; 已知零点或根情况求参数范围

15. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax (a > 0)$, $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

$h(x) = kx^2 + (1 - k^2)x - ax (k < 0)$, 求函数 $G(x) = f(x) - h(x)$ 在区间 $[2k, -2k]$ 上的最小值.

【答案】 (1) $k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{21}}{7}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$, $G(x)_{\min} = \frac{2}{3}k^3 - 2k$,
 $k \in \left[-\frac{\sqrt{21}}{7}, -\frac{1}{3}\right)$, $G(x)_{\min} = -\frac{26}{3}k^3 + 2k$.

【解析】 (1) $G(x) = f(x) - h(x)$

$$= -\frac{1}{3}x^3 - kx^2 - (1 - k^2)x$$

$$G'(x) = x^2 - 2kx - (1 - k^2)$$

$$= (x - k - 1)(x - k + 1),$$

由 $G'(x) > 0$, 得 $x < 1 + k$ 或 $x > 1 - k$,

由 $G'(x) < 0$, 得 $1 + k < x < 1 - k$,

$\therefore G(x)$ 在 $(-\infty, 1 + k)$, $(1 - k, +\infty)$ 单调递增, $(1 + k, 1 - k)$ 单调递减,

$\because k < 0$,

$\therefore 2k < 1 + k$,

① $-2k \leq 1 + k$ 即 $-\frac{1}{3} \leq k < 0$, $G(x)$ 在 $[2k, -2k]$ 单调递增,

$$\therefore G(x)_{\min} = G(2k) = \frac{2}{3}k^3 - 2k,$$

② $1 + k < -2k < 1 - k$ 即 $-1 < k < -\frac{1}{3}$,

$G(x)$ 在 $[2k, 1 + k]$ 单调递增, $(1 + k, -2k]$ 单调递减,

$$\therefore G(x)_{\min} = \min\{G(2k), G(-2k)\},$$

$$\text{令 } \varphi(k) = G(2k) - G(-2k) = 4k\left(\frac{7}{3}k^2 - 1\right),$$

当 $G(2k) \geq G(-2k)$ 即 $-\frac{\sqrt{21}}{7} \leq k < -\frac{1}{3}$ 时,

$$G(x)_{\min} = G(-2k) = \frac{2}{3}k^3 - 2k,$$

③ $-2k \geq -k$ 即 $k \leq -1$,

$G(x)$ 在 $(2k, 1 + k)$ 上增, $(1 + k, 1 - k)$ 减, $(1 - k, -2k)$ 增,

$$\begin{aligned}
&\therefore G(x)_{\min} = \min\{G(2k), G(1-k)\}, \\
&\text{令 } \varphi(k) = G(1-k) - G(2k) = -3k^3 + 6k^2 - k - \frac{2}{3}, \\
&\varphi'(k) = -9k^2 + 12k - 1 = -(3k-1)^2 < 0, \\
&\therefore \varphi(k) \geq \varphi(-1) > 0, \\
&\therefore G(1-k) > G(2k), \\
&\therefore G(x)_{\min} = G(2k) = \frac{2}{3}k^3 - 2k, \\
&\text{综上, } k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{21}}{7}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, 0\right), G(x)_{\min} = \frac{2}{3}k^3 - 2k, \\
&k \in \left[-\frac{\sqrt{21}}{7}, -\frac{1}{3}\right), G(x)_{\min} = -\frac{26}{3}k^3 + 2k.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）；求参数范围（含参二次型导函数）

三、综合创新

16. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax - a$, $a \in \mathbf{R}$.

记 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上最大值为 $M(a)$, 若 $M(a) > 1$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$.

【解析】 (1) 由 (1) 知:

① 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 此时 $M(a) = f(1) = 1$;

② 当 $\sqrt{-\frac{a}{3}} \geq 1$ 即 $a \leq -3$ 时, $[-1, 1] \subset \left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减,

$\therefore M(a) = f(-1) = -1 - 2a$,

$\therefore a \leq -3$, $\therefore -1 - 2a \geq 5$, 即 $M(a) \geq 5$;

③ 当 $-3 < a < 0$ 时, $\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}}\right) \subset [-1, 1]$,

而 $f(x)$ 在 $\left(-1, -\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, 1\right)$ 上递减, 在 $\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 上递增,

$\therefore M(a) = \max\left\{f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right), f(1)\right\}$

$= \max\left\{f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right), 1\right\}$.

由 $f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 1$, 得 $-\frac{2}{3}a\sqrt{-\frac{a}{3}} - a > 1$,

令 $t = \sqrt{-\frac{a}{3}}$, 则 $a = -3t^2$,

$$\begin{aligned}
&\therefore 2t^3 + 3t^2 - 1 > 0, \\
&\text{即 } 2(t^3 + 1) + 3(t^2 - 1) > 0 \Rightarrow (t+1)^2(2t-1) > 0, \\
&\therefore t > \frac{1}{2}, \therefore a < -\frac{3}{4}, \\
&\therefore \text{当 } -3 < a < -\frac{3}{4} \text{ 时, } f\left\{-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right\} > 1, \\
&\therefore M(a) = f\left\{-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right\}; \\
&\text{当 } -\frac{3}{4} \leq a < 0 \text{ 时, } f\left\{-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right\} < 1, \\
&\therefore M(a) = f(1) = 1. \\
&\text{综合①②③得: 若 } M(a) > 1, \\
&\text{则实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知最值情况求参数范围

17. 已知函数 $f(x) = \ln x$.

设 $h(x) = f(x) - k(x-1)$, 若 $h(x)$ 存在最大值, 且当最大值大于 $2k-2$ 时, 确定实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $(0, 1)$.

【解析】 (1) 设 $h(x) = f(x) - k(x-1)$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1-kx}{x}.$$

(1) 当 $k \leq 0$ 时, 对于任意的 $x > 0$, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $h(x)$ 无最大值, 即 $k \leq 0$ 不符合题意.

(2) 当 $k > 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 即 $1 - kx = 0$, 则 $x = \frac{1}{k} > 0$.

所以 $h(x)$, $h'(x)$ 变化如下:

x	0	$\left(0, \frac{1}{k}\right)$	$\frac{1}{k}$	$\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$	$h(0)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

$$\text{因为 } h(x)_{\max} = h\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1 + k.$$

$$\text{所以 } \ln \frac{1}{k} - 1 + k > 2k - 2 \text{ 成立, 即 } \ln k < -k + 1,$$

$$\text{令 } p(k) = \ln k + k - 1, k > 0,$$

$$\text{所以 } p'(k) = \frac{1}{k} + 1 > 0, \text{ 即 } p(k) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上为增函数.}$$

$$\text{又因为 } p(1) = 0, \text{ 所以当 } 0 < k < 1 \text{ 时, } p(k) < p(1) = 0.$$

所以, $0 < k < 1$ 时, 命题成立.

综上, k 的取值范围为 $(0, 1)$.

【标注】【知识点】 利用导数求单调性证不等式; 已知最值情况求参数范围

18. 已知函数 $f(x) = \frac{2ax + a^2 - 1}{x^2 + 1}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最大值和最小值, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$.

【解析】 (1) 由 (II) 得, $a = 0$ 时不合题意.

当 $a > 0$ 时, 由 (II) 得, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减,
所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在最大值 $f(\frac{1}{a}) = a^2 > 0$.

设 x_0 为 $f(x)$ 的零点, 易知 $x_0 = \frac{1-a^2}{2a}$, 且 $x_0 < \frac{1}{a}$, 从而 $x > x_0$ 时, $f(x) > 0$;
 $x < x_0$ 时, $f(x) < 0$.

若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最小值, 必有 $f(0) \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$.

所以 $a > 0$ 时, 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最大值和最小值, a 的取值范围是 $(0, 1]$.

当 $a < 0$ 时, 由 (II) 得 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 单调递增,
所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在最小值 $f(-a) = -1$.

若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最大值, 必有 $f(0) \geq 0$, 解得 $a \geq 1$, 或 $a \leq -1$.

所以 $a < 0$ 时, 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在最大值和最小值, a 的取值范围是
 $(-\infty, -1]$.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$.

【标注】【知识点】 求函数单调区间 (含参二次型导函数); 已知最值情况求参数范围

19. 已知函数 $f(x) = (2x+1)e^x + ax$, $g(x) = |f(x)|$.

若 $g(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \leq -4\sqrt{e}$ 或 $a \geq -\frac{1}{e}$.

【解析】 (1) 由题意知 $f(x) = 0$ 必有解,

即 $(2x+1)e^x + ax = 0$ 有解, 即 $-a = \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$ 有解,

设 $h(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$, 则 $h'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}e^x = \frac{(2x-1)(x+1)}{x^2}e^x$,

令 $h'(x) > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$,
 令 $h'(x) < 0$ 得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$,
 $\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减;
 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,
 且 $h(-1) = \frac{1}{e}$, $h(\frac{1}{2}) = 4\sqrt{e}$,
 当 $x < -1$ 时, $h(x) > 0$ 恒成立, $\therefore h(x) \in (0, \frac{1}{e}]$,
 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, $\therefore h(x) \in (-\infty, \frac{1}{e}]$;
 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, $\therefore h(x) \in [4\sqrt{e}, +\infty)$.
 $\therefore -a \leq \frac{1}{e}$ 或 $-a \geq 4\sqrt{e}$, $\therefore a \leq -4\sqrt{e}$ 或 $a \geq -\frac{1}{e}$.
 下面证明 $g(x) \rightarrow +\infty$, 先证 $e^x \geq x + 1$,
 设 $\varphi(x) = e^x - x - 1$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1$,
 当 $x < 0$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 递减;
 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 递增.
 $\therefore \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, $\therefore e^x \geq x + 1$.
 当 $a \geq -\frac{1}{e}$ 时, 若 $x \geq 0$,
 则 $f(x) = (2x + 1)e^x + ax \geq e^x + ax \geq x + 1 + ax$
 $\geq (1 + a)x + 1 \geq 1$,
 而 $y = x + 1$, $x \in [0, +\infty)$ 的值域是 $[1, +\infty)$,
 且 $f(x)$ 连续, $\therefore g(x) \rightarrow +\infty$,
 当 $a \leq -4\sqrt{e}$ 时, 若 $x \leq 0$,
 $f(x) = (2x + 1)e^x + ax \geq (2x + 1)e^x - 4\sqrt{e}x$
 $\geq 2(e^x - 2\sqrt{e})x + e^x$,
 由于 $x \leq 0$ 时, $e^x \leq 1 < 2\sqrt{e}$,
 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $e^x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$,
 又 $f(x)$ 连续, $\therefore g(x) \rightarrow +\infty$.
 综上所述, $a \leq -4\sqrt{e}$ 或 $a \geq -\frac{1}{e}$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

20. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (1 + a)x - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = xf(x)$. 若存在区间 $[m, n] \subseteq [\frac{1}{2}, +\infty)$, 使得函数 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m + 2) - 2, k(n + 2) - 2]$, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) $k \in \left(1, \frac{9+2\ln 2}{10}\right]$.

【解析】 (1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = xf(x) = x^2 - x \ln x$,

$$\text{令 } g'(x) = 2x - \ln x - 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x} (x > 0),$$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 为增函数;

$g(x)$ 在区间 $[m, n] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 递增,

$\therefore g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[k(m+2)-2, k(n+2)-2]$,

所以 $g(m) = k(m+2)-2$, $g(n) = k(n+2)-2$, $\frac{1}{2} \leq m \leq n$,

则 $g(x) = k(x+2)-2$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上至少有两个不同的正根,

$$k = \frac{g(x)+2}{x+2}, \text{ 令 } F(x) = \frac{g(x)+2}{x+2} = \frac{x^2 - x \ln x + 2}{x+2},$$

$$\text{求导得, } F'(x) = \frac{x^2 + 3x - 2 \ln x - 4}{(x+2)^2} \left(x \geq \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{令 } G(x) = x^2 + 3x - 2 \ln x - 4 \left(x \geq \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{则 } G'(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{(2x-1)(x+2)}{x},$$

所以 $G(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 递增, $G\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $G(1) = 0$,

当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $G(x) < 0$, $\therefore F'(x) < 0$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G(x) > 0$, $\therefore F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

$$\therefore F(1) < k \leq F\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore k \in \left(1, \frac{9+2\ln 2}{10}\right].$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参); 二阶导问题