

第三讲-恒成立与能成立及零点问题练习题

一、恒成立与能成立问题

1. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828 \dots$) .

若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

2. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - k - 1)$, $k \in \mathbf{R}$.

若对于任意 $x \in [e, e^2]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 k 的取值范围 .

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x - 1)$, $g(x) = e^x$.

设 $h(x) = f(x + 1) + g(x)$, 当 $x \geq 0$, $h(x) \geq 1$ 时, 求实数 a 的取值范围 .

4. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围 .

5. 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值 .

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x$ ($a > 0$) .

设函数 $g(x) = -(a+2)x$, 若至少存在一个 $x_0 \in [e, 4]$, 使得 $f(x_0) > g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围 .

7. 已知 $f(x) = a \sin x$ ($a \in \mathbf{R}$), $g(x) = e^x$.

设 $F(x) = g(x) - mx^2 - 2(x+1) + k$ ($k \in \mathbf{R}$), 对 $\forall x > 0$, $m < 0$, 有 $F(x) > 0$ 恒成立, 求 k 的最小值 .

8. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x}$ ($a \in \mathbf{R}$) .

若对任意的 $a \leq 0$, $f(x) \leq b \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围 .

二、零点问题

9. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

若关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围;

10. 设函数 $f(x) = \ln(x-1) + ax^2 + x + 1$, $g(x) = (x-1)e^x + ax^2$, $a \in \mathbf{R}$.

若函数 $g(x)$ 有两个零点, 试求 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x - 2$ ($a > 0$).

记 $g(x) = f(x) + x - b$ ($b \in \mathbf{R}$), 当 $a = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点, 求实数 b 的取值范围.

12. 设函数 $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbf{R}$).

若函数 $h(x) = \frac{x^2}{f(x)} - 1$ 在区间 $(0, 16)$ 内有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

13. 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x^2}$ ($a \neq 0$).

设 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x} - \ln x$, 若 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上有两个极值点, 求实数 a 的取值范围.

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = (-x^2 + ax - 3)e^x$ (其中 a 实数, e 是自然对数的底数).

若存在 $x_1, x_2 \in [e^{-1}, e]$ ($x_1 \neq x_2$), 使方程 $g(x) = 2e^x f(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

15. 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax^2 - 2x - 2$.

(1) 当 $a \leq 0$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 有且只有一个零点.

(2) 当 $a > 0$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的零点的个数. (只需写出结论)

16. 已知 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ ($a > 0$), 定义 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$.

若 $g(x) = \ln x$, 试讨论函数 $h(x)$ ($x > 0$) 的零点个数.

三、综合创新

17. (改编自2010新课标理21) 函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2 \ln x$, $g(x) = xe^{1-x}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

若对任意给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在 $(0, e]$ 上总存在两个不同的 x_i ($i = 1, 2$), 使得 $f(x_i) = g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = ax^2 + x(e^x - a)$, $g(x) = (1-a)x - x \ln(x+1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

若过点 $(0, f(0))$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有两条, 求 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (1+a)x - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = xf(x)$. 若存在区间 $[m, n] \subseteq \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 使得函数 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2) - 2, k(n+2) - 2]$, 求实数 k 的取值范围.

