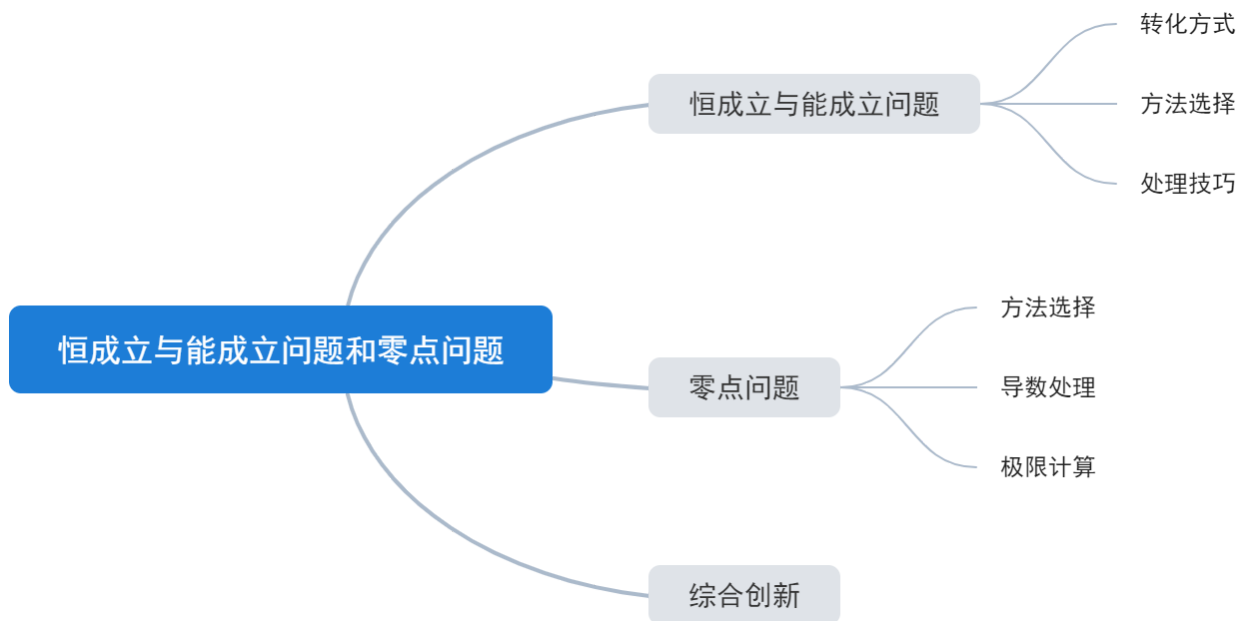


第三讲-恒成立与能成立及零点问题

1. 知识梳理



一、恒成立与能成立问题

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$, $x \in \mathbf{R}$.

若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$.

若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 恒成立, 求实数 k 的最小值;

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a - 4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.

已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.

① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.

② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

2. 思路总结

恒能成立问题解题思路：

1、方法的取舍；确定是采取参变分离还是分类讨论的思路，我们的选择原则如下：首先判断参数是否出现在多项中，如果函数中两项含有参数，一个是一次项，一个是二次项，很可能没法参变分离，例如 $f(x) = x^2 + ax - a^2$ 就没法实现参变分离；然后在参变分离可行的情况下，先尝试参变分离，分离完之后先对新的函数进行求导，看看求导是否麻烦或者求完之后的导数正负是否可以判断（有可能是导数零点可求、有可能是导数恒正或者恒负，在判断导数正负时有可能需要对于没法判断的部分再次求导），如果导数计算太麻烦或者导数正负无法判断，则选择分类讨论的思路；最后有些情况下我们参变分离之后函数导数正负可以判断，但是最值没法求时，也需要采取分类讨论的思路去做，例如我们将恒成立问题 $\forall x \in (0, 1), ax \geq \sin x$ 参变分离转化为 $\forall x \in (0, 1), a \geq \frac{\sin x}{x}$ 之后，

$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in (0, 1)$ 的最大值没法计算。

2、对于恒成立或者能成立进行转化，将其转化为最值问题，明确后面要求函数的最大值还是最小值；

3、求出最值之后满足最值需要满足的不等式，求出参数范围即可；

特殊备注：

技巧一：对于问题 $\forall x \in (0, +\infty), x^2 + 2a^2 \geq ax \ln x$ ，我们没法采取参变分离的思路处理，需要分类讨论，移向之后转化为 $f(x) = x^2 - ax \ln x + 2a^2 \geq 0$ ，但是求导之后会发现导数为

$f'(x) = 2x - a(1 + \ln x)$ ，导数因为既含有幂函数部分又含有对数部分，导数零点无法求解，这样的情况下，我们可以进行这样的技巧，首先两边同时除以 x ，转化为 $g(x) = x - a \ln x + \frac{2a^2}{x} \geq 0$ ，此时 $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{2a^2}{x^2} = \frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2}$ ，导数零点可求。

技巧二：对于导数的处理，对于函数 $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ ，导数为 $f'(x) = \frac{1 - x - 2 \ln x}{x^3}$ ，初步一看导数既含有幂函数部分又含有对数函数部分，零点求解不了，此时我们可以采取猜根法，猜 $x = 1$ 是否为零点，此问题发现是的，然后判断 $1 - x - 2 \ln x$ 的单调性，去判断导数为正为负区间，甚至有些情况下需要对于导数中不能确定正负的部分进行重新组合去判断正负，例如导数为

$f'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - x \ln x}{x^2}$ ，此函数不可判断正负的部分为分子部分，重新组合为

$x^2 - x - x \ln x + 1 = x(x - 1 - \ln x) + 1 \geq 1$ ，或者对于分子部分再次求导判断该部分的单调性进而判断其正负。

3. 模拟演练

4. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x$.

若存在 $x_0 \in \left[-1, \ln \frac{4}{3}\right]$ ，满足 $a - e^x + 1 + x < 0$ 成立，求 a 的取值范围 .

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ 与 $g(x) = a(x-1)$.

当 $x \in [1, +\infty)$ 时， $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围 .

6. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2 \ln x$, 函数 $f(x)$ 与 $g(x) = x + \frac{a}{x}$ 有相同极值点 .
 若 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$, 不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k - 1} \leq 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .

二、零点问题

1. 真题分析

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a > 0$.
 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围 ;
8. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.
 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.
 ① 证明 : $f(x)$ 恰有两个零点 .
 ② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明 : $3x_0 - x_1 > 2$.
9. 已知函数 $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$.
 证明 : 对任意的 $t \in (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内均存在零点 .
10. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列 .
 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围 .

2. 思路总结

零点问题处理思路 :

- 1、方法选择 ; 选择参变分离或者分类讨论, 原则如上
- 2、求解函数的导数, 判断导数的正负, 画出函数的走势图, 计算极值点处和端点处的函数值, 对于开区间的问题需要用极限的思维计算极限值, 此处我们需要知道的是

$$x \rightarrow +\infty, \frac{\log_b x}{x^a} \rightarrow 0 (a > 0, b > 1), \frac{x^a}{c^x} \rightarrow 0 (a > 0, c > 1);$$
- 3、根据零点个数情况画出横线与图像的相对位置关系, 写出应该满足的不等式, 求解出来参数取值范围。

3. 模拟演练

11. 已知函数 $f(x) = a(2-x)e^x$, $g(x) = (x-1)^2$.
 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .
 ① 求实数 a 的取值范围 .
 ② 证明 : $x_1 + x_2 < 2$.

12. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, $g(x) = b \ln x$, 且曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处有相同的切线.
当 $n \in [6, +\infty)$ 时, 求方程 $f(x) + x = ng(x)$ 在区间 $(1, e^n)$ 内实根的个数.

三、综合创新

13. 当 $x \geq 0$ 时, $1 - e^{-x} \leq \frac{x}{ax+1}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
14. 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.
当 $a = 1$ 时, 试对 $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $(4k - 1 - \ln x)x + f(x) - 1 < 0 (k \in \mathbf{Z})$ 成立, 求 k 的最大值.
15. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 2x (a \in \mathbf{R})$.
若过点 $(0, -\frac{1}{3})$ 可作函数 $y = f(x)$ 图象的三条不同切线, 求实数 a 的取值范围.
16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.
当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2 \ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.