

第一讲-导数基础练习题

一、导数计算

1. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(e) = 2$ ($e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数), 则 a 的值为 _____.

【答案】 1

【解析】 根据题意, 函数 $f(x) = ax \ln x$,
则函数 $f'(x) = a(x)' \ln x + ax(\ln x)'$,
 $= a \ln x + a$,
若 $f'(e) = 2$,
则 $f'(e) = a \ln e + a = 2a = 2$,
解可得 $a = 1$.
故答案为: 1.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

2. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3 \ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 _____.

【答案】 3

【解析】 $\because y = \frac{x^2}{4} - 3 \ln x$,
 $\therefore y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$,
令 $\frac{1}{2}x - \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -2$,
经检验 $x = 3$ 或 $x = -2$ 是方程的解,
 $\because x > 0$,
 $\therefore x = 3$.

【标注】 【知识点】 已知斜率求切线方程

3. 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 $\because f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$,

$$\therefore f'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1,$$

$\therefore$ 函数图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 $\tan \theta = 1$,

$\therefore$ 函数图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角 θ 为 $\frac{\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

【标注】 【知识点】 倾斜角计算; 导数的几何意义; 导数的几何意义的实际应用

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 的图象在 $A(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\tan x_0 =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x_0}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x_0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x_0 = \frac{\cos x_0}{4},$$

$$\tan x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【标注】 【知识点】 已知斜率求切线方程

5. 设曲线 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3, 2)$ 处的切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ().

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

【答案】 D

【解析】 $\because y = \frac{x+1}{x-1}$,

$$\therefore y' = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2},$$

$$\therefore \text{所以 } y'|_{x=3} = \frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 切线斜率为 $-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直,

$\therefore$ 直线 $ax + y + 1 = 0$ 的斜率为 $-a$,

$$\therefore \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-a) = -1,$$

$$\therefore a = -2.$$

故选D.

【标注】【知识点】已知切线方程求参数

6. 函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $4x - y + 2 = 0$ 平行, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 1,$

函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $4x - y + 2 = 0$ 平行,

$$\therefore f'(1) = 3a + 1 = 4, \text{ 解得 } a = 1.$$

故答案为: 1.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 求在某点处的切线方程

二、切线方程

7. 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.

【答案】 $y = 3x + 1$

【解析】 函数 $f(x) = xe^x + 2x + 1$ 求导得,

$$f'(x) = e^x + xe^x + 2,$$

所以在点 $(0, 1)$ 处的切线方程得斜率 $k = f'(0) = e^0 + 0 \cdot e^0 + 2 = 3,$

故切线方程为 $y - 1 = 3(x - 0)$, 即 $y = 3x + 1$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程; 导数的几何意义的实际应用; 导数的几何意义

8. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $M(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = \frac{1}{2}x + 3$, 则: $f(1) + f'(1) =$ _____.

【答案】 4

【解析】 $\therefore$ 直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 与 $f(x)$ 相切于点 $(1, f(1))$,

$$\begin{aligned}\therefore f(1) &= \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \\ \therefore f(1) + f'(1) &= 4.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

9. 若曲线 $y = ax + \ln x$ 在点 $(1, a)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$ ，则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 $y = ax + \ln x$ 的导数为 $y' = a + \frac{1}{x}$ ，
则在点 $(1, a)$ 处的切线斜率为 $a + 1$ ，
由于在点 $(1, a)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$ ，
则有 $a + 1 = 2$ ，即 $a = 1$ ，
则 $1 = 2 + b$ ，
解得 $b = -1$.
故答案为：-1 .

【标注】【知识点】导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

10. 若曲线 $y = ax + e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$. 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 $y = ax + e^x$ ，
 $y' = a + e^x$ ， $x = 0$ 时， $a + 1 = 2$ ， $a = 1$.
 $\therefore y = x + e^x$ 在 $(0, 1)$ 的切线方程 $y = 2x + 1$.
 $\therefore b = 1$.
 $\therefore a + b = 2$.
故答案为：2 .

【标注】【知识点】导数的几何意义

11. 若直线 $y = kx$ 与曲线 $y = x + e^{-x}$ 相切，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 - e$

【解析】 设切点为 (x_0, y_0) ，则 $y_0 = x_0 + e^{-x_0}$ ，

$$\because y' = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x},$$

$$\therefore \text{切线斜率 } k = 1 - e^{-x_0},$$

又点 (x_0, y_0) 在直线上, 代入方程得 $y_0 = kx_0$,

$$\text{即 } x_0 + e^{-x_0} = (1 - e^{-x_0})x_0,$$

$$\text{解得 } x_0 = -1,$$

$$\therefore k = 1 - e,$$

故答案为 $1 - e$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导；导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

12. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切线, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 - \ln 2$

【解析】 方法一：设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln x + 2$ 和曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切点分别为

$(x_1, kx_1 + b)$ 和 $(x_2, kx_2 + b)$.

由导数的几何意义可得 $k = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2 + 1}$, 即 $x_1 = x_2 + 1$,

由切点也在各自的曲线上, 可得 $\begin{cases} kx_1 + b = \ln x_1 + 2 \\ kx_2 + b = \ln(x_2 + 1) \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

从而 $kx_1 + b = \ln x_1 + 2$, 则 $b = \ln x_1 + 1 = 1 - \ln 2$.

方法二：由 $y = \ln x + 2$, 得 $y' = \frac{1}{x}$,

由 $y = \ln(x + 1)$, 得 $y' = \frac{1}{x + 1}$.

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln x + 2$ 相切于点 $(x_1, \ln x_1 + 2)$,

则 $k = \frac{1}{x_1}$ ①, $\ln x_1 + 2 = kx_1 + b$ ②,

设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = \ln(x + 1)$ 相切于点 $(x_2, \ln(x_2 + 1))$,

则 $k = \frac{1}{x_2 + 1}$ ③, $\ln(x_2 + 1) = kx_2 + b$ ④,

由①得 $x_1 = \frac{1}{k}$, 代入②得 $\ln \frac{1}{k} + 2 = k \cdot \frac{1}{k} + b$, 即 $-\ln k + 1 = b$ ⑤,

由③得 $x_2 = \frac{1}{k} - 1$, 代入④得 $\ln \frac{1}{k} = k \cdot \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + b$, 即 $-\ln k = 1 - k + b$ ⑥,

⑤-⑥得 $1 = k - 1$, $k = 2$,

代入⑤得 $b = -\ln 2 + 1 = 1 - \ln 2$,

故答案为 $1 - \ln 2$.

【标注】【知识点】求过某点的切线方程；导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

三、单调区间与极值

13. 已知函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx (m \in \mathbf{R})$.

当 $m = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，在 $(-\infty, 0)$ 递减 .

【解析】(1) 当 $m = 1$ 时， $f'(x) = e^x + 2x - 1 = (e^x - 1) + 2x$,

若 $x > 0$, 则 $e^x - 1 > 0$, $f'(x) > 0$,

若 $x < 0$, 则 $e^x - 1 < 0$, $f'(x) < 0$,

综上， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，在 $(-\infty, 0)$ 递减 .

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；双变量问题；已知切线方程求参数

14. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$, 其中常数 $a > 0$.

当 $a = e$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值 .

【答案】(1) $f(x)$ 有极小值 $f(1) = 0$, 没有极大值 .

【解析】(1) 当 $a = e$ 时， $f(x) = e^x - e \ln x - e$,

则 $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$, 易知 $f'(x)$ 单调递增，且 $f'(1) = 0$,

则当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减；当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增；

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(1) = 0$, 没有极大值 .

【标注】【知识点】求解函数极值；导数与单调性；二阶导问题；通过构造函数证明不等式；已知零点或根情况求参数范围；导数与最值；函数零点存在定理

15. 已知函数 $f(x) = x^2(\ln x + \ln a)$, $(a > 0)$.

当 $a = 1$ 时，设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间和极值 .

【答案】(1) 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时， $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减，

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,
 可得当 $x = \frac{1}{e}$, 取得极小值 $-\frac{1}{e}$.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = \frac{f(x)}{x} = x \ln x$,

可得 $g'(x) = 1 + \ln x$,

令 $g'(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{e}$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

可得当 $x = \frac{1}{e}$, 取得极小值 $-\frac{1}{e}$.

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的最值；求解函数极值；利用导数求函数的单调性、单调区间

四、综合创新

16. 若函数 $f(x) = a \ln x - x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[2, +\infty)$

【解析】 $\because f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增,

$$\therefore f'(x) = \frac{a}{x} - 1 \geq 0 \text{ 在 } (1, 2) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore a \geq x \text{ 在 } (1, 2) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore a \geq 2.$$

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围

17. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x) - x \ln x$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $a \geq \frac{1}{2e}$

【解析】 $f'(x) = 2ax + 1 - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

$$= 2ax - \ln x,$$

$$\therefore f'(x) > 0 \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore 2ax - \ln x \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
 &\text{即 } a \geq \frac{\ln x}{2x}, \\
 &\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{2x}, \\
 &\text{则 } g'(x) = \frac{-2\ln x + 2}{4x^2}, \\
 &\text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = e, \\
 &\text{当 } x \in (1, e) \text{ 时 } g'(x) > 0, g(x) \nearrow, \\
 &\text{当 } x \in (e, +\infty) \text{ 时 } g'(x) < 0, g(x) \searrow, \\
 &\therefore a \geq g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{2e}. \\
 &\text{综上 } a \geq \frac{1}{2e}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围

18. 已知 $b > -1, c > 0$, 函数 $f(x) = x + b$ 的图象与 $g(x) = x^2 + bx + c$ 的图象相切:

(1) 求 b 与 c 的关系式 (用 c 表示 b) _____.

(2) 设函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有极值点, 点 c 的取值范围 _____.

【答案】 (1) $b = 2\sqrt{c} - 1$

(2) $(0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup (7 + 4\sqrt{3}, +\infty)$

【解析】 (1) 令 $f'(x) = g'(x)$, 得 $2x + b = 1$,

$$\therefore x = \frac{1-b}{2},$$

$$\text{由 } f\left(\frac{1-b}{2}\right) = g\left(\frac{1-b}{2}\right),$$

$$\text{得 } (b+1)^2 = 4c,$$

$$\because b > -1, c > 0,$$

$$\therefore b = 2\sqrt{c} - 1.$$

$$(2) F(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 + 2bx^2 + (b^2 + c)x + bc,$$

$$F'(x) = 3x^2 + 4bx + b^2 + c,$$

$$\text{令 } F'(x) = 0, \text{ 即 } 3x^2 + 4bx + b^2 + c = 0,$$

$$\Delta = 16b^2 - 12(b^2 + c) = 4(b^2 - 3c),$$

若 $\Delta = 0$, 则 $F'(x) = 0$ 有一个实根,

x	$(-\infty, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$F'(x)$	+	0	+

x_0 不是极值点,

若 $\Delta > 0$, 则 $F'(x) = 0$ 有两个实根,

x_1, x_2 , 设 $x_1 < x_2$,

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$F'(x)$	+	0	-	0	+

则 x_1 为极大值点, x_2 为极小值点,

由 $\Delta = 4(b^2 - 3c) > 0$, 得 $b < -\sqrt{3c}$ 或 $b > \sqrt{3c}$,

$\therefore b = 2\sqrt{c} - 1$,

$\therefore 2\sqrt{c} - 1 < -\sqrt{3c}$ 或 $2\sqrt{c} - 1 > \sqrt{3c}$,

得 $0 < c < 7 - 4\sqrt{3}$ 或 $c > 7 + 4\sqrt{3}$.

故 c 的取值范围为 $(0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup (7 + 4\sqrt{3}, +\infty)$.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 求在某点处的切线方程; 已知极值情况求参数范围

19. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) + f'(x) > 1$, $f(0) = 4$, 则不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ().

A. $(0, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 方法一: 由 $f(x) + f'(x) > 1$ 可得 $f'(x) + f(x) - 1 > 0$,

$e^x f(x) > e^x + 3$ 即 $e^x f(x) - e^x > 3$,

不妨设 $g(x) = f(x)e^x - e^x$, 则 $g'(x) = f'(x)e^x + e^x f(x) - e^x = e^x(f'(x) + f(x) - 1)$,

所以 $g'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $g(0) = f(0)e^0 - e^0 = 3$, 所以 $e^x f(x) - e^x > 3$ 的解集为 $x > 0$.

方法二: 已知 $f(x) + f'(x) - 1 > 0$, 设函数 $g(x) = e^x f(x) - e^x$,

$\because e^x > 0$, $\therefore g'(x) = e^x(f(x) + f'(x) - 1) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$\because f(0) = 4$, $\therefore f(0) = e^0 f(0) - e^0 = f(0) - 1 = 4 - 1 = 3$.

不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ 等价于 $g(x) = e^x f(x) - e^x > 3$ 即 $g(x) > g(0)$,

解集为 $(0, +\infty)$.

故选B.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间