

第一讲-导数基础练习题

一、导数计算

1. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(e) = 2$ ($e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数), 则 a 的值为 _____.
2. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3 \ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 _____.
3. 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为 _____.
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 的图象在 $A(x_0, y_0)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\tan x_0 =$ _____.
5. 设曲线 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3, 2)$ 处的切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ().
A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2
6. 函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $4x - y + 2 = 0$ 平行, 则 $a =$ _____.

二、切线方程

7. 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.
8. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $M(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = \frac{1}{2}x + 3$, 则: $f(1) + f'(1) =$ _____.
9. 若曲线 $y = ax + \ln x$ 在点 $(1, a)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 $b =$ _____.
10. 若曲线 $y = ax + e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$. 则 $a + b =$ _____.
11. 若直线 $y = kx$ 与曲线 $y = x + e^{-x}$ 相切, 则 $k =$ _____.
12. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x + 1)$ 的切线, 则 $b =$ _____.

三、单调区间与极值

13. 已知函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx (m \in \mathbf{R})$.
当 $m = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

14. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$, 其中常数 $a > 0$.

当 $a = e$ 时 , 求函数 $f(x)$ 的极值 .

15. 已知函数 $f(x) = x^2(\ln x + \ln a)$, $(a > 0)$.

当 $a = 1$ 时 , 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间和极值 .

四、 综合创新

16. 若函数 $f(x) = a \ln x - x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

17. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x) - x \ln x$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

18. 已知 $b > -1$, $c > 0$, 函数 $f(x) = x + b$ 的图象与 $g(x) = x^2 + bx + c$ 的图象相切 :

(1) 求 b 与 c 的关系式 (用 c 表示 b) _____ .

(2) 设函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有极值点 , 点 c 的取值范围 _____ .

19. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 : $f(x) + f'(x) > 1$, $f(0) = 4$, 则不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 () .

A. $(0, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$