

导数综合(二)练习题

1. 已知函数 $f(x) = e^x \left(x - \frac{a}{x} - 2 \right)$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, (其中常数 $e = 2.71828 \dots$, 是自然对数的底数) .

若函数 $f(x)$ 为定义域上的增函数, 且 $f(x_1) + f(x_2) = -4e$, 证明: $x_1 + x_2 \geq 2$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 方法一: $\because$ 函数 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\therefore a = 1,$$

$$\text{即 } f(x) = e^x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right),$$

$$\text{注意到 } f(1) = -2e, \text{ 故 } f(x_1) + f(x_2) = -4e = 2f(1),$$

$$\therefore \text{不妨设 } 0 < x_1 \leq 1 \leq x_2,$$

$$\text{欲证 } x_1 + x_2 \geq 2, \text{ 只需证 } x_2 \geq 2 - x_1,$$

$$\text{只需证 } f(x_2) \geq f(2 - x_1),$$

$$\text{即证 } -4e - f(x_1) \geq f(2 - x_1),$$

$$\text{即证 } f(x_1) + f(2 - x_1) \leq -4e,$$

$$\text{令 } \varphi(x) = f(x) + f(2 - x), 0 < x \leq 1,$$

$$\text{只需证 } \varphi(x) \leq \varphi(1),$$

$$\therefore \varphi'(x) = f'(x) - f'(2 - x) = e^{2-x}(x-1)^2 \left[\frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2} - \frac{(3-x)}{(2-x)^2} \right],$$

$$\text{下证 } \varphi'(x) \geq 0, \text{ 即证 } \frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2} - \frac{(3-x)}{(2-x)^2} \geq 0,$$

$$\text{由熟知的不等式 } e^x \geq 1+x \text{ 可知 } e^{2x-2} = (e^{x-1})^2 \geq (1+x-1)^2 = x^2,$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, 即 } \frac{e^{2x-2}}{x^2} \geq 1,$$

$$\therefore \frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2} - \frac{(3-x)}{(2-x)^2} \geq x+1 - \frac{(3-x)}{(x-2)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{(x-2)^2},$$

$$\text{易知当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } x^2 - 2x - 1 < 0,$$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2 - 2x - 1) \geq 0,$$

$$\therefore \frac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2} - \frac{(3-x)}{(2-x)^2} \geq 0,$$

$$\therefore \varphi'(x) \geq 0, \text{ 即 } \varphi(x) \text{ 单调递增, 即 } \varphi(x) \leq \varphi(1),$$

从而 $x_1 + x_2 \geq 2$ 得证 .

方法二: $\because$ 函数 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\therefore a = 1,$$

$$\text{即 } f(x) = e^x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right),$$

注意到 $f(1) = -2e$, 故 $f(x_1) + f(x_2) = -4e = 2f(1)$,

$\therefore$ 不妨设 $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2$,

$$\text{令 } g(x) = f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2(x+1)}{x^2}$$

$$= e^x(x-1) - \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{e^x(x-1)(x^3+x^2+2)}{x^3},$$

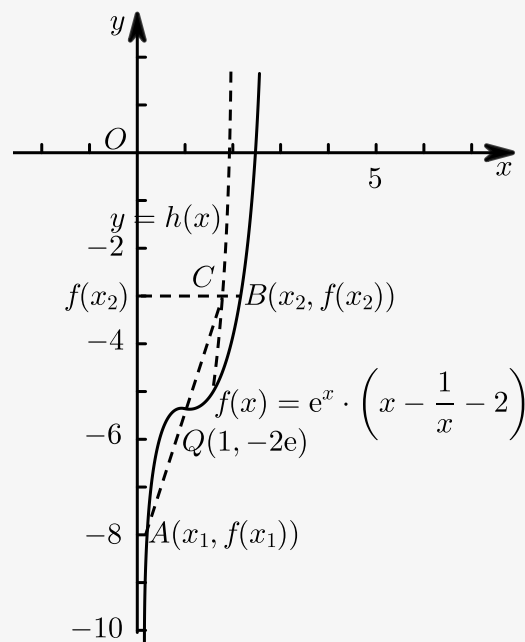
x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		极小值	

由上表可画出 $f(x) = e^x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right)$ 的图象,

如下图实线所示,

下图虚线所示为函数 $f(x) = e^x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right)$ ($0 < x \leq 1$) 的图象关于点 $Q(1, -2e)$

对称后的函数 $h(x) = -4e - f(2-x)$ 的图象,



设图中点 $A(x_1, f(x_1))$, 则 $C(2-x_1, f(x_2))$, $B(x_2, f(x_2))$,

欲证 $x_1 + x_2 \geq 2$, 只需证 $x_2 \geq 2 - x_1$,

只需证点 B 不在点 C 的左侧即可,

即证当 $1 \leq x < 2$, $-4e - f(2-x) \geq f(x)$ 恒成立,

$$\text{即证 } -4e - e^{2-x} \left(-x - \frac{1}{2-x} \right) \geq e^x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right),$$

$$\text{即证 } e^x \left(\frac{1}{x} + 2 - x \right) + e^{2-x} \left(x + \frac{1}{2-x} \right) \geq 4e,$$

$$\begin{aligned}
& \text{由基本不等式可知 } e^x \left(\frac{1}{x} + 2 - x \right) + e^{2-x} \left(x - \frac{1}{2-x} \right) \\
& \geq 2 \sqrt{e^x \left(\frac{1}{x} + 2 - x \right) \cdot e^{2-x} \left(x + \frac{1}{2-x} \right)} \\
& = 2e \sqrt{2 + (2-x)x = \frac{1}{(2-x)x}} \geq 2e \cdot \sqrt{2 + 2\sqrt{(2-x)x \cdot \frac{1}{(2-x)x}}} = 4e, \\
& \therefore e^x \left(\frac{1}{x} + 2 - x \right) + e^{2-x} \left(x + \frac{1}{2-x} \right) \geq 4e, \\
& \therefore x_1 + x_2 \geq 2 \text{ 得证.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】双变量问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；导数的几何意义；求在某点处的切线方程

2. 已知 $a \neq 0$ ，函数 $f(x) = |e^x - e| + e^x + ax$ 。

已知当 $a < -e$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，($x_1 < x_2$)，求证： $f(x_1 x_2) > a + e$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 注意到 $a + e = f(1)$ ， $\therefore$ 所证不等式转化为证明 $f(x_1 x_2) > f(1)$ ，

$\because a < -e$ ， $\therefore f(1) = a + e < 0$ ，所以 $f(x)$ 的两个零点 $x_1 < 1 < x_2$ ，

方法一：由 $x_1 < 1 < x_2$ 可得： $\begin{cases} ax + e = 0 \\ 2e^x + ax - e = 0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} a = \frac{e-2e^x}{x} \\ x = -\frac{e}{2} = \frac{ex}{2e^x - e} \end{cases}$ ，及 $x_1 x_2 = \frac{ex}{2e^x - e}$ ，

令 $h(x) = \frac{ex}{2e^x - e}$ ，则 $h'(x) = \frac{2ex(2e^x - e - xe^x)}{(2e^x - e)^2}$ ，

令 $\varphi(x) = 2e^x - e - xe^x$ ， $\varphi(1) = 0$ ，则当 $x > 1$ 时，

$\varphi'(x) = e^x - xe^x = (1-x)e^x < 0$ ，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减， $\therefore \varphi(x) < \varphi(1) = 0$ ，即 $h'(x) < 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减， $h(x) < h(1) = 1$ ，即 $x_1 x_2 < 1$ ，

$\because a < -e$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 均单调递减，

$\therefore f(x_1 x_2) > f(1) = a + e$ 。

方法二：同方法一得知 $x_1 < 1 < x_2$ ，下面考虑证明 $x_1 x_2 < 1$ ， $x_1 < \frac{1}{x_2}$ ，

$\therefore x_1, \frac{1}{x_2} \in (-\infty, 1)$ ，

下证： $f(x_1) > f\left(\frac{1}{x_2}\right)$ ， $\because f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，

所以只需证明： $f\left(\frac{1}{x_2}\right) < 0$ 得 $\frac{a}{x_2} + e < 0$ ，由 $2e^{x_2} + ax_2 - e = 0$ 得到 $a = \frac{e - 2e^{x_2}}{x_2}$ ，

$\therefore$ 只需证明： $f\left(\frac{1}{x_2}\right) = \frac{e - 2e^{x_2}}{x_2} + e = \frac{e - 2e^{x_2} + ex_2^2}{x_2} < 0$ ，

令 $\varphi(x) = e - 2e^x + ex^2, x \in (1, +\infty)$,
 $\therefore h'(x) = -2e^x + 2ex, h'(1) = 0, h'(x) = -2e^x + 2e = -2(e^x - e) < 0$,
 $\therefore h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,
 $\therefore h'(x) < h'(1) = 0$,
 $\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, $\therefore h(x) < h(1) = 0$,
 $\therefore f\left(\frac{1}{x_2}\right) = \frac{h(x)}{x} < 0$, 所以 $x_1 x_2 < 1$ 得证.
 $\therefore a < -e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减,
 $\therefore f(x_1 x_2) > f(1) = a + e$.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；利用导数证明不等式恒成立问题

3. 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - bx$.

当 $a = b = 0$ 时, 令 $H(x) = f(x) - \frac{1}{x}, G(x) = mx$, 若 $H(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点
 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $H(x) = \ln x - \frac{1}{x}, G(x) = mx$,

定义域是 $(0, +\infty)$,

$$\therefore \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = mx_1 \text{ ①,}$$

$$\ln x_2 - \frac{1}{x_2} = mx_2 \text{ ②,}$$

①+②得:

$$\ln x_1 + \ln x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = m(x_1 + x_2),$$

$$\text{即 } \ln x_1 x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = m(x_1 + x_2) \text{ ③,}$$

②-①得:

$$\ln x_2 - \ln x_1 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = m(x_2 - x_1),$$

$$\text{即 } \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = m(x_2 - x_1) \text{ ④,}$$

由③, ④得:

$$\ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_2}{x_1},$$

不妨设 $0 < x_1 < x_2$,

$$\text{记 } t = \frac{x_2}{x_1} > 1,$$

$$\text{令 } F(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+1}, t > 1,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} > 0, \\
&\therefore F(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递增}, \\
&\therefore F(t) = F(1) = 0, \\
&\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \\
&\text{即 } \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}, \\
&\therefore \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2, \\
&\therefore \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1+x_2)}{x_1 x_2} < \ln x_1 x_2 - \frac{4 \times \sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2} \\
&= \ln x_1 x_2 - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} \\
&= 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}}, \\
&\therefore 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} > 2, \\
&\text{即 } \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1, \\
&\text{令 } \omega(x) = \ln x - \frac{2}{x}, \\
&\therefore \omega'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0 \\
&\therefore \omega(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增}, \\
&\text{又 } \therefore \ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e} = \frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{e} < 1, \\
&\therefore \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1 > \ln(\sqrt{2}e) - \frac{2}{\sqrt{2}e}, \\
&\text{即 } \omega(\sqrt{x_1 x_2}) > \omega(\sqrt{2}e), \\
&\therefore \sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e, \\
&\therefore x_1 x_2 > 2e^2, \text{ 即得证}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；双变量问题

4. 设函数 $f(x) = e^x - ax + a (a \in \mathbf{R})$.

若 $f(x)$ 图像与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点, 求证: $x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (2) 可知 $a > 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单减, $(\ln a, +\infty)$ 单增,

设 $x_1 < x_2$ 而 $f(0) = 1 + a > 0$, 因此 $0 < x_1 < \ln a < x_2$,

本题即证 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 1$, 而 $e^x = a(x - 1)$,

$$\therefore x_1 - 1 = \frac{e^{x_1}}{a}, \quad x_2 - 1 = \frac{e^{x_2}}{a},$$

即证 $e^{x_1+x_2} < a^2$, 即证 $x_1 + x_2 = 2 \ln a$,

$$\begin{aligned}
& \text{设 } F(x) = f(x) - f(2\ln a - x) \\
& = e^x - ax - e^{2\ln a - x} + a(2\ln a - x) \\
& = e^x - 2ax - \frac{a^2}{e^x} + 2a\ln a \quad (x > 0), \\
& F'(x) = e^x - 2a + \frac{a^2}{e^x} \geq 0, \\
& \text{因此 } F(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单增, 由于 } 0 < x_1 < \ln a < x_2, \\
& \text{可得 } F(x_1) < F(\ln a) = 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(2\ln a - x_1), \\
& \therefore x_2, 2\ln a - x_1 > \ln a, f(x) \text{ 在 } (\ln a, +\infty) \text{ 单增}, \\
& \therefore x_2 < 2\ln a - x_1, \\
& \therefore x_1 + x_2 < 2\ln a, \\
& \therefore x_1 x_2 < x_1 + x_2.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知切线方程求参数；导数的几何意义；求在某点处的切线方程

5. 设函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$ ，其图象在点 $P(2, f(2))$ 处切线的斜率为 -3 。

当 $a = 2$ 时，令 $g(x) = f(x) - kx$ ，设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $y = g(x)$ 的两个零点， x_0 是 x_1 与 x_2 的等差中项，求证： $g'(x_0) < 0$ ($g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导函数)。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) $\because a = 2, a = 8b - 6,$

$$\therefore b = 1,$$

$$\text{即 } g(x) = 2 \ln x - x^2 - kx,$$

$$\because g(x) \text{ 的两零点为 } x_1, x_2,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 2 \ln x_1 - x_1^2 - kx_1 = 0 \\ 2 \ln x_2 - x_2^2 - kx_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{相减: } 2(\ln x_1 - \ln x_2) - (x_1^2 - x_2^2) - k(x_1 - x_2) = 0,$$

$$\because x_1 \neq x_2,$$

$$\therefore k = \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} - (x_1 + x_2)$$

$$\therefore g'(x) = \frac{2}{x} - 2x - k$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{4}{x_1 + x_2} - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{\frac{x_1 - x_2}{2}} \\
& = \frac{2}{x_1 - x_2} \left[\frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - (\ln x_1 - \ln x_2) \right] \\
& = \frac{2}{x_1 - x_2} \left[\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} - \left(n \frac{x_1}{x_2}\right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } t &= \frac{x_1}{x_2}, t \in (0, 1), \\ \phi(t) &= \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t = 2 - \frac{4}{t+1} - \ln t, \\ \text{则 } \phi'(t) &= \frac{4}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0, \\ \text{则 } \phi(t) &\text{在 } (0, 1) \text{ 上单调递减,} \\ \text{则 } \phi(t) &> \phi(1) = 0, \\ \text{又 } \frac{2}{x_1 - x_2} &< 0, \text{ 则 } g'(x_0) < 0. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用；利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数证明不等式恒成立问题

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2-a)x$.

(1) 设 $a > 0$, 证明: 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$.

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 证明: $f'(x_0) < 0$.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 令 $g(x) = f\left(\frac{1}{a} + x\right) - f\left(\frac{1}{a} - x\right) = \ln(1+ax) - \ln(1-ax) - 2ax$,

$$\text{由 } g'(x) = \frac{a}{1+ax} + \frac{a}{1-ax} - 2a = \frac{2a^3x^2}{1-a^2x^2},$$

$a > 0$ 且 $0 < x < \frac{1}{a}$, 则 $g'(x) > 0$,

即 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x) > g(0) = 0$ 即 $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$ 成立.

(2) 由 $f'(x) = \frac{(2x+1)(-ax+1)}{x} (x > 0)$,

所以当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 与 x 轴至多有 1 个交点, 不符合题意,

当 $a > 0$ 时, 有 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \frac{1}{a}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ (舍),

此时 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$,

不妨设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 则必有 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$,

由 (2) 可知

$$f(x_2) = f(x_1) = f\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} - x_0\right)\right) < f\left(\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a} - x_1\right)\right) = f\left(\frac{2}{a} - x_1\right),$$

$$\text{且 } x_2 \cdot \frac{2}{a} - x_1 \in \left(\frac{1}{a}, +\infty \right),$$

$$\text{所以 } \frac{2}{a} - x_1 < x_2,$$

$$\text{即 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{a},$$

$$\text{所以 } f'(x_0) < 0,$$

$$\text{证明: } f'(x_0) < 0.$$

【标注】【知识点】双变量问题；通过构造函数证明不等式；求在某点处的切线方程；导数的几何意义

7. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = \ln x$.

设 $h(x) = f(x) + g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 求证: $h(x_1) - h(x_2) > \frac{3}{4} - \ln 2$;

【答案】 (1) $h(x_1) - h(x_2) > \frac{3}{4} - \ln 2$

【解析】 (1) $\because h(x) = x^2 - ax + \ln x$,

$$\therefore h'(x) = \frac{2x^2 - ax + 1}{x} (x > 0), \therefore x_1 x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\because x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$\therefore x_2 \in (1, +\infty), \text{ 且 } ax_i = 2x_i^2 + 1 (i = 1, 2).$$

$$\therefore h(x_1) - h(x_2).$$

$$= (x_1^2 - ax_1 + \ln x_1) - (x_2^2 - ax_2 + \ln x_2)$$

$$= (-x_1^2 - 1 + \ln x_1) - (-x_2^2 - 1 + \ln x_2)$$

$$= x_2^2 - x_1^2 + \ln \frac{x_1}{x_2}$$

$$= x_2^2 - \frac{1}{4x_2^2} - \ln 2x_2^2 (x_2 > 1).$$

$$\text{设 } \mu(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2} - \ln 2x^2 (x \geq 1), \text{ 则 } \mu'(x) = \frac{(2x^2 - 1)^2}{2x^3} \geq 0,$$

$$\therefore \mu(x) > \mu(1) = \frac{3}{4} - \ln 2,$$

$$\text{即 } h(x_1) - h(x_2) > \frac{3}{4} - \ln 2.$$

【标注】【知识点】导数与最值；导数与极值

8. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 证明: $f(x) \leq x^2 + x - 1$.

(2)

求证：对任意正整数 n ，都有 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$ （其中 $e \approx 2.7183$ 为自然对数的底数）。

【答案】（1）证明见解析。

（2）证明见解析。

【解析】（1）当 $a = 1$ 时， $f(x) = \ln x + x^2$ ，

要证明 $f(x) \leq x^2 + x - 1$ ，

即证 $\ln x \leq x - 1$ ，即 $\ln x - x + 1 \leq 0$ ，

设 $g(x) = \ln x - x + 1$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ ，

令 $g'(x) = 0$ 得， $x = 1$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g'(x) > 0$ ，

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，

$\therefore x = 1$ 为极大值点，也为最大值点，

$\therefore g(x) \leq g(1) = 0$ ，即 $\ln x - x + 1 \leq 0$ ，

故 $f(x) \leq x^2 + x - 1$ 。

（2）由（2）知， $\ln x \leq x - 1$ ，

令 $x = 1 + \frac{1}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

则得 $\ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ 。

$\therefore \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$= \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - \ln e$ ，

即 $\ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \ln e$ ，

$\therefore \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$ 。

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数求函数的最值；通过构造函数证明不等式

9. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax$ ， $g(x) = e^x - ax^2 + 3a$ （其中 e 是自然对数的底数， $e = 2.71828 \cdots$ ）。

（1）若函数 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

（2）

求证：对任意正整数 n ，都有 $\frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}$ 。

【答案】 (1) $a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right]$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) $g'(x) = e^x - a, x \in [0, +\infty)$,

①当 $a \leq 1$, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增,

$$\therefore g(x) \geq g(0) = 1 + 3a,$$

$$\therefore 1 + 3a \geq 0, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \leq a \leq 1,$$

②当 $a > 1$, $g(x)$ 在 $[0, \ln a)$ 上递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上递增,

$$\therefore x = \ln a \text{ 时, } g(x)_{\min} = g(\ln a) = 4a - a \ln a,$$

$$\therefore 4a - a \ln a > 0 \text{ 得 } 1 < a < e^4,$$

综上所述, $a \in \left[-\frac{1}{3}, e^4\right]$ 。

(2) $x > 0$ 时, $e^x \geq x + 1$,

两边同时取对数得 $x \geq \ln(x+1)$, 令 $x = \frac{1}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则有 $\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}$

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e,$$

$$\therefore \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} > \frac{1}{e},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+1} \times \frac{2^2}{2^2+1} \times \cdots \times \frac{2^n}{2^n+1} > \frac{1}{e}.$$

【标注】【知识点】导数与最值；通过构造函数证明不等式；利用导数证明不等式恒成立问题；利用导数求函数的单调性、单调区间