

导数综合 (二)

一、极值点与零点相关不等式

1. 典型例题

🔗 构造函数

1. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{x} - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证 : $2 < x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 先证 $x_1 + x_2 > 2$.

依题设, 有 $a = \frac{1}{x_1} + \ln x_1 = \frac{1}{x_2} + \ln x_2$, 于是 $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \ln \frac{x_2}{x_1}$.

记 $\frac{x_2}{x_1} = t, t > 1$, 则 $\ln t = \frac{t-1}{tx_1}$, 故 $x_1 = \frac{t-1}{t \ln t}$.

于是 $x_1 + x_2 = x_1(t+1) = \frac{t^2-1}{t \ln t}$, $x_1 + x_2 - 2 = \frac{2\left(\frac{t^2-1}{2t} - \ln t\right)}{\ln t}$,

记函数 $g(x) = \frac{x^2-1}{2x} - \ln x, x > 1$.

因为 $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2} > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 .

于是 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1) = 0$.

又 $\ln t > 0$, 所以 $x_1 + x_2 > 2$.

再证 : $x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$.

因为 $f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = ax - 1 - x \ln x = 0$,

故 x_1, x_2 也是 $h(x)$ 的两零点 .

由 $h'(x) = a - 1 - \ln x = 0$, 得 $x = e^{a-1}$ (记 $p = e^{a-1}$) .

仿 (1) 值 p 是 $h(x)$ 的唯一最大值点, 故有 $\begin{cases} h(p) > 0 \\ x_1 < p < x_2 \end{cases}$.

记函数 $\varphi(x) = \ln x - \frac{2(x-p)}{x+p} - \ln p$,

则 $\varphi'(x) = \frac{(x-p)^2}{x(x+p)^2} \geq 0$,

故 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 .

故当 $x > p$ 时, $\varphi(x) > \varphi(p) = 0$;

当 $0 < x < p$ 时, $\varphi(x) < 0$.

于是 $ax_1 - 1 = x_1 \ln x_1 < \frac{2x_1(x_1 - p)}{x_1 + p} + x_1 \ln p$.

整理, 得 $(2 + \ln p - a)x_1^2 - (2p + ap - p \ln p - 1)x_1 + p > 0$,

即 $x_1^2 - (3e^{a-1} - 1)x_1 + e^{a-1} > 0$,

同理, $x_2^2 - (3e^{a-1} - 1)x_2 + e^{a-1} < 0$,

故 $x_2^2 - (3e^{a-1} - 1)x_2 + e^{a-1} < x_1^2 - (3e^{a-1} - 1)x_1 + e^{a-1}$,

$(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < (3e^{a-1} - 1)(x_2 - x_1)$,

于是 $x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$.

综上, $2 < x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$.

【标注】【知识点】已知零点或根情况求参数范围; 利用导数求函数的零点及个数; 双变量问题; 通过构造函数证明不等式; 导数与单调性; 导数与最值; 函数零点的概念

备注: 2018~2019学年4月天津河西区天津市新华中学高三下学期月考理科第20题14分

2. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - k - 1)$, $k \in \mathbf{R}$.

若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 \cdot x_2 < e^{2k}$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $\because f(x_1) = f(x_2)$,

由(1)得 $f(x)$ 在 $(0, e^k) \downarrow (e^k, +\infty) \uparrow$,

且 $f(e^{k+1}) = 0$.

不妨设 $x_1 < x_2$, 即 $0 < x_1 < e^k < x_2 < e^{k+1}$,

$\because f(x)$ 在 $(e^k, +\infty) \uparrow$,

$\therefore f(x_2) < f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right)$.

又 $\because f(x_1) = f(x_2)$.

即证 $f(x_1) < f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right)$,

构造函数 $h(x) = f(x) - f\left(\frac{e^{2k}}{x}\right)$
 $= (\ln x - k - 1)x - \left(\ln \frac{e^{2k}}{x} - k - 1\right)\frac{e^{2k}}{x}$
 $= x \ln x - (k+1)x + e^{2k}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{k-1}{x}\right)$.

$h'(x) = (\ln x - k)\frac{x^2 - e^{2k}}{x^2}$,

$\because x \in (0, e^k)$,

$\therefore \ln x - k < 0$, $x^2 < e^{2k}$.

即 $h'(x) > 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, e^k) \uparrow$, $h'(x) < h(e^k)$.

$\therefore h(e^k) = f(e^k) - f\left(\frac{e^{2k}}{e^k}\right) = 0$.

$\therefore h(x) < 0$.

即 $f(x_1) < f\left(\frac{e^{2k}}{x_1}\right) = f(x_2)$.

$\therefore x_1 x_2 < e^{2k}$ 成立 .

【标注】【知识点】导数与最值

备注：2019~2020学年3月天津河西区天津市实验中学高三下学期周测

 构造齐次型进行消元

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

若函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明 $\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} > 2$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 由 $\begin{cases} \ln x_1 - ax_1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 = 0 \end{cases}$,

得 $\ln x_2 - \ln x_1 = a(x_2 - x_1)$,

即 $\frac{1}{a} = \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$,

所以 $\frac{1}{\ln x_2} - \frac{1}{\ln x_1} - 2$

$= \frac{1}{ax_1} + \frac{1}{ax_2} - 2$

$= \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) - 2$

$= \frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1}}{\ln \frac{x_2}{x_1}}$,

设 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $\ln \frac{x_2}{x_1} > 0$, $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1} = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$,

设 $g(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$, 则 $g'(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} > 0$,

则函数 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

所以 $g(t) > g(1) = 0$, 从而 $\frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1}}{\ln \frac{x_2}{x_1}} > 0$,

即 $\frac{1}{\ln x_2} - \frac{1}{\ln x_1} > 2$.

【标注】【知识点】双变量问题；求函数极值（含参一次型导函数）

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.

记 $f(x) = f(x) + g(x)$, 如果 x_1, x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2 < 4x_1$, $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数, 证明: $h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) > 0$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 由题意知,

$$h(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x \right] + \left[-\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x \right] \\ = 2\ln x - x^2 - ax,$$

$$h(x_1) = 2\ln x_1 - x_1^2 - ax_1 = 0, h(x_2) = 2\ln x_2 - x_2^2 - ax_2 = 0,$$

$$\text{两式相减, 整理得 } 2\ln \frac{x_2}{x_1} + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = a(x_2 - x_1),$$

$$\text{所以 } a = \frac{2\ln \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1}} - (x_2 + x_1), \text{ 又因为 } h'(x) = \frac{2}{x} - 2x - a,$$

$$\text{所以 } h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) = \frac{6}{2x_1+x_2} - \frac{2}{3}(2x_1+x_2) - a$$

$$= -\frac{2}{x_2 - x_1} \left[\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{\frac{3}{2}\frac{x_2}{x_1} - 3}{2 + \frac{x_2}{x_1}} \right] - \frac{1}{3}(x_1 - x_2),$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} \in (1, 4), \varphi(t) = \ln t - \frac{3t-3}{t+2},$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = \frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2} < 0,$$

$$\text{所以 } \varphi(t) \text{ 在 } (1, 4) \text{ 上单调递减, 故 } \varphi(t) < \varphi(1) = 0,$$

$$\text{又 } -\frac{2}{x_2 - x_1} < 0, -\frac{1}{3}(x_1 - x_2) > 0, \text{ 所以 } h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) > 0.$$

【标注】【知识点】利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；双变量问题；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围；函数零点的概念

备注：2018~2019学年11月天津东丽区天津一中滨海学校高三上学期月考理科第20题14分

5. 设函数 $f(x) = e^x - ax + a (a \in \mathbf{R})$.

在(2)的条件下, 证明: $f'(\sqrt{x_1x_2}) < 0$ ($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数).

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 由(2)得 $\begin{cases} e^{x_1} - ax_1 + a = 0 \\ e^{x_2} - ax_2 + a = 0 \end{cases}$,

$$\text{两式相减得, } e^{x_1} - e^{x_2} - ax_1 + ax_2 = 0,$$

解得： $a = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$ ，
 令 $\frac{x_2 - x_1}{2} = t (t > 0)$ ，
 则 $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} - \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}}{2t} [2t - (e^t - e^{-t})]$ ，
 设 $g(t) = 2t - (e^t - e^{-t})$ ，
 则 $g'(t) = 2 - (e^t + e^{-t}) \leq 2 - 2\sqrt{e^t \cdot e^{-t}} \leq 0$ ，
 所以 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，
 则有 $g(t) < g(0) = 0$ ，而 $\frac{e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}}{2t} > 0$ ，
 所以 $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ ，
 由(2)知， x_1, x_2 均为正数，
 所以有 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，
 因为 $f'(x) = e^x - a$ 单调递增，
 所以 $f'(\sqrt{x_1 x_2}) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，
 所以 $f'(\sqrt{x_1 x_2}) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ ，
 故 $f'(\sqrt{x_1 x_2}) < 0$ 。

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；已知零点或根情况求参数范围；导数的几何意义；求在某点处的切线方程

备注：2019~2020学年3月天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高三下学期月考第20题16分

利用零点处切线进行放缩

6. 已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in \mathbb{R})$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $n \geq 2$ 。

- (1) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P ，曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$ ，求证：对于任意的正实数 x ，都有 $f(x) \leq g(x)$ ；
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 ，求证： $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$ 。

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 答案见解析

【解析】 (1) 证明：设点 P 的坐标为 $(x_0, 0)$ 则 $x_0 = n^{\frac{1}{n-1}}$ ， $f'(x_0) = n - n^2$ ，

曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y = f'(x)(x - x_0)$ ，即 $g(x) = f'(x)(x - x_0)$

.

令 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，

即 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$, 则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

由于 $f'(x) = n - nx^{n-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又因为 $F'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) > 0$,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

所以对于任意的正实数 x , 都有 $F(x) \leq F(x_0) = 0$,

即对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$.

(2) 证明: 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 由 (II) 知 $g(x) = (n - n^2)(x - x_0)$, 设方程 $g(x) = a$ 的根为 x_2' ,

可得 $x_2' = \frac{a}{n - n^2} + x_0$, 当 $n \geq 2$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

又由 (II) 知 $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$, 可得 $x_2 \leq x_2'$.

类似地, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y = h(x)$, 可得 $h(x) = nx$.

当 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) - h(x) = -x^n < 0$, 即对于任意的 $x \in (0, +\infty)$,

$f(x) < h(x)$.

设方程 $h(x) = a$ 的根为 x_1' , 可得 $x_1' = \frac{a}{n}$. 因为 $h(x) = nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

且 $h(x_1') = a = f(x_1) < h(x_1)$, 因此 $x_1' < x_1$.

由此可得 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = \frac{a}{1 - n} + x_0$.

因为 $n \geq 2$, 所以 $2^{n-1} = (1 + 1)^{n-1} \geq 1 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n$, 故

$2 \geq n^{\frac{1}{n-1}} = x_0$.

所以, $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1 - n} + 2$.

【标注】【知识点】求函数单调区间(含参指对型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求单调性证不等式

备注: 2015年高考真题天津卷理科第20题

 确定零点、极值点以及特殊点的大小关系进行放缩

7. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 由 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} > 0$, 可得 $\ln \frac{1}{a} > 1$,

则 $\frac{1}{a} > e$, 此时 $f(1) = \frac{1}{a} - e > 0$, 由此可得 $x_1 < 1 < \ln \frac{1}{a} < x_2$,
 故 $x_2 - x_1 > \ln \frac{1}{a} - 1$, 即 $x_1 - x_2 < 1 - \ln \frac{1}{a}$,
 又因为 $f(x_1) = \frac{x_1}{a} - e^{x_1} = 0$, $f(x_2) = \frac{x_2}{a} - e^{x_2} = 0$,
 所以 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2} < e^{1 - \ln \frac{1}{a}} = e^{\ln ae} = ae$,
 所以 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

【标注】【知识点】函数零点存在定理；利用导数求函数的最值；双变量问题

备注：2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟（4月）第20题16分

利用极值点间的关系进行消元

8. 已知函数 $f(x) = -\ln 2x - ax^2 + x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

若 $f(x)$ 由两个极值点 x_1, x_2 , 证明： $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 4\ln 2$.

【答案】（1）证明见解析 .

【解析】（1）由（2）可知，当且仅当 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时，

有两个极值点，分别为 x_1, x_2 ，

且 x_1, x_2 是方程 $-2ax^2 + x - 1 = 0$ 的两根，

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{1}{2a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2a},$$

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) = \ln \frac{1}{2x_1} - ax_1^2 + x_1 + \ln \frac{1}{2x_2} - ax_2^2 + x_2$$

$$= -(\ln 2x_1 + \ln 2x_2) - a(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)$$

$$= -\ln \frac{2}{a} - a \left[\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{a} \right] + \frac{1}{2a}$$

$$= \ln a + \frac{1}{4a} + 1 - \ln 2,$$

$$\text{设 } h(a) = \ln a + \frac{1}{4a} + 1 - \ln 2, a \in \left(0, \frac{1}{8}\right),$$

$$g'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a^2} = \frac{4a - 1}{4a^2} < 0,$$

$$\therefore \text{在 } a \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \text{ 时, } g(a) \text{ 单减,}$$

$$\therefore g(a) > g\left(\frac{1}{8}\right),$$

$$\therefore g(a) > \ln \frac{1}{8} + 3 - \ln 2 = 3 - 4\ln 2,$$

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) > 3 - 4\ln 2.$$

【标注】【知识点】求函数极值（含参二次型导函数）；通过构造函数证明不等式；利用韦达定理解决双变量问题

备注：2018年天津南开区高三一模文科第20题14分

9. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

① 求实数 a 的范围.

② 证明： $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

【答案】 (1) ① $0 < a < \frac{1}{2}$.

② 证明见解析.

【解析】 (1) ① $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$.

函数 $f(x)$ 有两个极值点等价于方程 $2x^2 - 2x + a = 0$ 有两个不同的正根,

设 $\mu(x) = 2x^2 - 2x + a$, 则 $\begin{cases} \mu(0) = a > 0 \\ \Delta = 4 - 8a > 0 \end{cases}$,

解得 $0 < a < \frac{1}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 则 $0 < a < \frac{1}{2}$.

② $f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$.

由 $f'(x) = 0$, 得 $2x^2 - 2x + a = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 1$,

所以 $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1)}{x_2} &= \frac{x_1^2 - 2x_1 + a \ln x_1}{\frac{1 - x_1}{1 - x_1}} \\ &= \frac{(x_1 - 1)^2 - 1 + 2x_1(1 - x_1) \ln x_1}{1 - x_1} \\ &= 1 - x_1 + \frac{1}{x_1 - 1} + 2x_1 \ln x_1, \end{aligned}$$

令 $h(t) = 1 - t + \frac{1}{t - 1} + 2t \ln t, t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

所以 $h'(t) = -1 - \frac{1}{(t - 1)^2} + 2(1 + \ln t)$

$$= \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2} + 2 \ln t < 0.$$

$h(t)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上递减, $h(t) > h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln 2$,

所以 $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围；双变量问题；通过构造函数证明不等式

备注：2019年天津河东区高三二模理科第20题

2. 巩固练习

🔗 构造函数

10. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 证明: 由已知得: $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 不难发现 $x_1 \neq 1, x_2 \neq 1$,

故可整理得 $-a = \frac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2} = \frac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$.

设 $g(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$, 则 $g(x_1) = g(x_2)$,

那么 $g'(x) = \frac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}e^x$, 当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$

时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

设 $m > 0$, 构造代数式:

$$g(1+m) - g(1-m) = \frac{m-1}{m^2}e^{1+m} - \frac{-m-1}{m^2}e^{1-m} = \frac{1+m}{m^2}e^{1-m} \left(\frac{m-1}{m+1}e^{2m} + 1 \right)$$

设 $h(m) = \frac{m-1}{m+1}e^{2m} + 1, m > 0$,

则 $h'(m) = \frac{2m^2}{(m+1)^2}e^{2m} > 0$, 故 $h(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 有

$h(m) > h(0) = 0$.

因此, 对于任意的 $m > 0$, $g(1+m) > g(1-m)$ 恒成立.

由 $g(x_1) = g(x_2)$ 可知 x_1, x_2 不可能在 $g(x)$ 的同一个单调区间上, 不妨设 $x_1 < x_2$,

则必有 $x_1 < 1 < x_2$,

令 $m = 1 - x_1 > 0$, 则有

$$g[1 + (1 - x_1)] > g[1 - (1 - x_1)] \Leftrightarrow g(2 - x_1) > g(x_1) = g(x_2),$$

而 $2 - x_1 > 1, x_2 > 1$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 因此

$$g(2 - x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 > x_2,$$

整理得 $x_1 + x_2 < 2$.

【标注】【知识点】极值点偏移问题; 通过构造函数证明不等式; 求参数范围 (含参指对型导函数)

🔗 构造齐次型进行消元

11. 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 设 $f(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 , 设 $x_1 > x_2 > 0$,

$$\because f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, \therefore \ln x_1 - kx_1 = 0, \ln x_2 - kx_2 = 0,$$

$$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2), \ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2),$$

$$\because x_1 x_2 > e^2, \text{ 故 } \ln x_1 + \ln x_2 > 2, \text{ 故 } k(x_1 + x_2) > 2,$$

$$\text{即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}, \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2},$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1, \text{ 上式转化为 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1),$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$$\therefore g(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore g(t) > g(1) = 0, \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2.$$

【标注】 【思想】分类讨论思想

【知识点】 双变量问题; 通过构造函数证明不等式; 求参数范围 (含参一次型导函数)

12. 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$).

若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明: $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意知函数 $g(x) = \ln x - x - b$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

因为 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + b = \ln x_1 \\ x_2 + b = \ln x_2 \end{cases}, \text{ 相减得 } x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1},$$

$$\text{不妨令 } \frac{x_2}{x_1} = t > 1, \text{ 则 } x_2 = tx_1, \text{ 则 } tx_1 - x_1 = \ln t,$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{1}{t-1} \ln t, x_2 = \frac{t}{t-1} \ln t,$$

$$\text{要证 } g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

$$\text{只要证 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2} + 1,$$

$$\begin{aligned}
& \text{只要证 } \frac{t-1}{\ln t} + \frac{t-1}{t \ln t} > \frac{2(t-1)}{(1+t) \ln t} + 1, \\
& \text{即证 } t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t > 0, \\
& \text{令 } \varphi(t) = t - \frac{1}{t} - \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t, \\
& \varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1}{t^2(1+t)^2}, \\
& \text{令 } m(t) = t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1, \quad m'(t) = 4t^3 + 3t^2 - 8t + 1, \\
& m''(t) = 12t^2 + 6t - 8 > 0 \text{ 对 } t > 1 \text{ 恒成立}, \\
& \therefore m'(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增}, \\
& \therefore m'(t) > m'(1) = 0, \\
& \therefore m(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增}, \\
& \therefore m(t) > m(1) = 0, \\
& \text{即 } \varphi'(t) > 0, \\
& \therefore \varphi(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单增}, \\
& \therefore \varphi(t) > \varphi(1) = 0, \text{ 即原不等式成立}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二阶导问题；双变量问题；利用导数解决不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式

13. 设函数 $f(x) = x^2 - a \ln x - (a-2)x$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 .

① 求满足条件的最小正整数 a 的值.

② 求证： $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$.

【答案】 (1) ① 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

② 证明见解析.

【解析】 (1) ① 由 (1) 得，函数 $f(x)$ 有两个零点，

所以 $a > 0$ ， $f(x)$ 的最小值 $f\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ ，

即 $-a^2 + 4a - 4a \ln \frac{a}{2} < 0$ ，因为 $a > 0$ ，

所以 $a - 4 + 4 \ln \frac{a}{2} > 0$ ，

令 $h(a) = a - 4 + 4 \ln \frac{a}{2}$ ，显然 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增，且 $h(2) = -2 < 0$ ，

$h(3) = 4 \ln \frac{3}{2} - 1 > 0$ ，

所以，存在 $a_0 \in (2, 3)$ ， $h(a_0) = 0$ ，

当 $a > a_0$ 时， $h(a) > 0$ ，当 $0 < a < a_0$ 时， $h(a) < 0$ ，

所以满足条件的正整数 $a = 3$,

又当 $a = 3$ 时, $f(3) = 3(2 - \ln 3) > 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(1 - 4\ln \frac{3}{2}\right) < 0$,

$f(1) = 0$,

所以, 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

② 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 于是 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2$

所以 $a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$,

因为 $f'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

故只要证 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可, 即证明 $x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$,

即证 $x_1^2 - x_2^2 + (x_1 + x_2)(\ln x_1 - \ln x_2) > x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)$,

即证 $\frac{x_1}{x_2} < \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$, 设 $\frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1)$,

令 $m(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}$,

则 $m'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} \geq 0$,

当且仅当 $t = 1$ 时, $m'(t) = 0$, 所以 $m(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增,

又 $m(1) = 0$, 所以当 $m \in (0, 1)$, $m(t) < 0$ 总成立, 所以原题得证.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 已知零点或根情况求参数范围; 通过构造函数证明不等式; 利用公式和四则运算法则求导; 函数零点的概念

利用零点处切线进行放缩

14. 已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$), 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为

$(e-1)x + ey + e - 1 = 0$.

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

【答案】 (1) $a = 1, b = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意 $f(-1) = 0$, 所以 $f(-1) = (-1+b)\left(\frac{1}{e} - a\right) = 0$,

又 $f'(x) = (x+b+1)e^x - a$,

所以 $f'(-1) = \frac{b}{e} - a = -1 + \frac{1}{e}$,

若 $a = \frac{1}{e}$, 则 $b = 2 - e < 0$, 与 $b > 0$ 矛盾, 故 $a = 1, b = 1$.

(2) 由(1)可知 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$, $f(0) = 0, f(-1) = 0$,

设 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 处的切线方程为 $h(x)$,

易得, $h(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1)$, 令 $F(x) = f(x) - h(x)$,

即 $F(x) = (x+1)(e^x - 1) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1)$, $F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}$,

当 $x \leq -2$ 时, $F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e} < -\frac{1}{e} < 0$

当 $x > -2$ 时,

设 $G(x) = F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}$, $G'(x) = (x+3)e^x > 0$,

故函数 $F'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $F'(-1) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $F(x) \geq F(-1) = 0$, $f(x_1) \geq h(x_1)$,

设 $h(x) = m$ 的根为 x_1' , 则 $x_1' = -1 + \frac{me}{1-e}$,

又函数 $h(x)$ 单调递减, 故 $h(x_1') = f(x_1) \geq h(x_1)$, 故 $x_1' \leq x_1$,

设 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = t(x)$, 易得 $t(x) = x$,

令 $T(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - x$,

$T'(x) = (x+2)e^x - 2$,

当 $x \leq -2$ 时, $T'(x) = (x+2)e^x - 2 < -2 < 0$,

当 $x > -2$ 时,

设 $H(x) = T'(x) = (x+2)e^x - 2$, $H'(x) = (x+3)e^x > 0$,

故函数 $T'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $T'(x) > 0$,

所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$T(x) \geq T(0) = 0$, $f(x_2) \geq t(x_2)$,

设 $t(x) = m$ 的根为 x_2' , 则 $x_2' = m$,

又函数 $t(x)$ 单调递增, 故 $t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$, 故 $x_2' \geq x_2$,

又 $x_1' \leq x_1$,

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\leq x_2' - x_1' = m - \left(-1 + \frac{me}{1-e}\right) \\ &= 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】双变量问题；二阶导问题；求参数范围（含参指对型导函数）

 确定零点、极值点以及特殊点的大小关系进行放缩

15. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 恰有两个不同的实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由 (2) 可知 $f(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上 $f(x) < 0$, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$.

由 (2) 结论可知, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 $f(1) = 1$,

所以, 方程 $f(x) = a$ 有两个不同的实根 x_1, x_2 时, 必有 $0 < a < 1$, 且

$$e^{-1} < x_1 < 1 < x_2,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{a}\right) = a(1 - \ln a) > a = f(x_2),$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减可知 } x_2 > \frac{1}{a},$$

$$\text{所以 } x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1.$$

【标注】 【知识点】利用导数求单调性证不等式; 直接求函数的单调性 (不含参)

 利用极值点间的关系进行消元

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 方法一: 由 (1) 可知, 若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a > 2$, 且 $f'(x) = 0$ 的两根分别

为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 且满足根与系数的关系 $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 1$, 易得

$$0 < x_1 < 1, x_2 > 1, x_1 = \frac{1}{x_2},$$

$$\text{由 } f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x, \text{ 可得 } f(x_2) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) = 0, \text{ 即 } f(x_2) + f(x_1) = 0,$$

$$\text{若要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2, \text{ 只需证 } \frac{2f(x_2)}{x_2 - x_1} < a - 2, \text{ 即证}$$

$$2f(x_2) < (a - 2)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right), \text{ 整理得 } 2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0 \quad (x_2 > 1),$$

构造函数 $h(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$ ($x > 1$), 求导得

$$h'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0,$$

因此 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore h(x) < h(1) = 0$, 从而

$$2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0 \quad (x_2 > 1) \text{ 成立, 原式得证.}$$

方法二:

由(1)可知,若 $f(x)$ 有两个极值点,则 $a > 2$,且 $f'(x) = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),且满足根与系数的关系 $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 1$,易得

$$0 < x_1 < 1, x_2 > 1, x_1 = \frac{1}{x_2},$$

$$\begin{aligned} \text{令 } h(x) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\frac{1}{x_2} - x_2 + a \ln x_2 - (\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} - (x_2 - x_1) + a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= -2 + \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

若要证 $h(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$,只需证 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < 1$,即

$$\ln \frac{x_2}{x_1} < x_2 - x_1,$$

由于 $x_1 = \frac{1}{x_2}$,上式可转化为

$$\ln x_2^2 = 2 \ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0, (*)$$

构造函数 $p(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x} (x > 1)$,

则 $p'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$,故 $p(x) < p(1) = 0$,故(*)式成立,原结论得证.

方法三:由(1)知,当且仅当 $a > 2$ 时 $f(x)$ 存在两个极值点.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2 - ax + 1 = 0$,

所以 $x_1 x_2 = 1$,

不妨设 $x_1 < x_2$,则 $x_2 > 1$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= -2 + \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + \frac{-2a \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 等价于 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

设函数 $t(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$,则由(1)知, $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $t(1) = 0$,从而当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t(x) < 0$,

所以 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$,

即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

方法四:函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

函数的导数 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$,

$\therefore f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ,

$$\begin{aligned}
&\therefore f'(x) \text{ 存在两个零点 } x_1, x_2, \\
&\therefore f'(x) = 0 \text{ 存在两个根 } x_1, x_2, \\
&\therefore x^2 - ax + 1 = 0 \text{ 存在两个根 } x_1, x_2, \\
&\therefore x_1 + x_2 = a > 0, x_1 x_2 = 1, \\
&\therefore f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2} \right) + a(\ln x_1 - \ln x_2) \\
&= 2(x_2 - x_1) + a(\ln x_1 - \ln x_2), \\
&\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2}, \\
&\therefore \text{欲证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1, \\
&\text{由 } A - L - G \text{ 不等式可知 } \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}, \\
&\text{又 } x_1 x_2 = 1, \\
&\therefore 1 < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}, \text{ 即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1, \\
&\text{证毕.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用韦达定理解决双变量问题；已知极值情况求参数范围

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln(1-x)$, a 为常数.

若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) - x_1 > -\frac{3 + \ln 4}{8}$.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) 由(1)知, $f(x)$ 有两个极值点, 当且仅当 $0 < a < \frac{1}{4}$,

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $-x^2 + x - a = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = a$, 则 $0 < x_1 < \frac{1}{2}$,

由于 $f(x_2) - x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + a \ln(1-x_2) - x_1$
 $= \frac{1}{2}(1-x_1)^2 + x_1 x_2 \ln x_1 - x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1 + x_1(1-x_1) \ln x_1$,

设 $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + x(1-x) \ln x, \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$,

$g'(x) = x - 2 + (1-2x) \ln x + x(1-x) \cdot \frac{1}{x} = (1-2x) \ln x - 1$,

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $(1-2x) \ln x < 0$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,

又 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = -\frac{3 + \ln 4}{8}$,

所以 $g(x) > g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3 + \ln 4}{8}$,

即 $f(x_2) - x_1 > -\frac{3 + \ln 4}{8}$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；导数与最值；利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式；双变量问题；导数与极值

二、数列相关不等式

1. 典型例题

18. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

(2) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【答案】 (1) a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $x \in [1, +\infty)$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(x) = a - \frac{a-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x - (a-1)}{x^2} = \frac{a}{x^2}(x-1)\left(x - \frac{1-a}{a}\right)$$

① 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 此时 $\frac{1-a}{a} > 1$

当 $1 < x < \frac{1-a}{a}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1-a}{a}\right]$ 上是减函数,

$\therefore$ 在 $\left(1, \frac{1-a}{a}\right)$ 上存在 x_0 ,

使得 $f(x_0) < f(1) < 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上不恒成立;

② 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} \leq 1$, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上成立,

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$f(x) \geq f(1) = 0$, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

综上所述, 所求 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2) 由 (2) 知当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

$ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x \geq 0 (x \geq 1)$,

令 $a = \frac{1}{2}$, 有 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \geq \ln x$,

当 $x > 1$ 时, $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) > \ln x$

令 $x = \frac{k+1}{k}$, 有

$\ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right]$

$$\text{即} \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right), k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

将上述 n 个不等式依次相加得：

$$\ln(n+1) < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2(n+1)},$$

$$\text{整理得} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \geq 1).$$

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数证明不等式恒成立问题；通过构造函数证明不等式

备注：2019~2020学年4月天津南开区天津市南大奥宇学校高三下学期月考第20题16分

19. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 证明： $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-f(k)} > \frac{3n^2-n-2}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$. (参考数据： $\ln 2 \approx 0.6931$.)

【答案】 (1) $a = 0$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+a}$, 由题意, 得 $f'(1) = 0$, 所以 $a = 0$.

(2) $\because k - f(k) = \ln k$, 设 $\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{4}(x^2 - 1)$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = -\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x},$$

当 $x \geq 2$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是减函数,

$$\therefore \varphi(x) \leq \varphi(2) = \ln 2 - \frac{3}{4} < 0,$$

$$\text{所以} \ln x < \frac{1}{4}(x^2 - 1).$$

$$\therefore \text{当} x \geq 2 \text{时}, \frac{1}{\ln x} > \frac{4}{x^2 - 1} = 2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln n} &> 2 \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3n^2 - n - 2}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 原不等式成立.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；已知极值情况求函数解析式；导数与最值；函数零点存在定理；已知零点情况求参数的取值范围

备注：2018~2019学年2月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第20题

2. 巩固练习

20. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

$$\text{证明: } \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2).$$

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\therefore \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} = (\ln 1 - \ln 3) + (\ln 2 - \ln 4) + (\ln 3 - \ln 5)$
 $+ \cdots + [\ln(n-2) - \ln n] + [\ln(n-1) - \ln(n+1)]$
 $= \ln 2 - \ln n - \ln(n+1)$
 $= \ln \frac{2}{n(n+1)}.$
 $\therefore \text{证明 } \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2).$
 即证明: $\ln \frac{2}{n(n+1)} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2).$ 令 $t = n(n+1) \geq 6$,
 则上述不等式等价于 $\ln \frac{2}{t} > \frac{2-t}{\sqrt{2t}}, t \geq 6.$
 令 $v(t) = \ln \frac{2}{t} - \frac{2-t}{\sqrt{2t}}, t \geq 6.$
 则 $v'(t) = -\frac{1}{t} + \frac{t+2}{2\sqrt{2t}\sqrt{t}} = \frac{t-2\sqrt{2}\sqrt{t}+2}{2\sqrt{2t}\sqrt{t}} = \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2t}\sqrt{t}} > 0.$
 $\therefore$ 函数 $v(t)$ 在 $[t, +\infty)$ 上单调递增.
 $\therefore v(t) \geq v(6) = \ln \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0,$
 $\therefore \ln \frac{2}{t} > \frac{2-t}{\sqrt{2t}}, t \geq 6.$
 因此 $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2).$

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参);通过构造函数证明不等式;利用韦达定理解决双变量问题;求函数单调区间(含参二次型导函数)

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ 与 $g(x) = a(x-1).$

(1) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求证: $\ln(2n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{4i}{4i^2-1} (n \in \mathbf{N}^*).$

【答案】 (1) $a \geq \frac{1}{2}.$

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 方法一：即 $x \geq 1$ 时， $\frac{x \ln x}{x+1} \leq a(x-1)$ ， $x=1$ 时，显然成立；

$x > 1$ 时，即 $a \geq \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ ，

令 $h(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ ，

则 $h'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 \ln x + x^2 - \ln x - 1}{(x^2 - 1)^2}$ ，

令 $\varphi(x) = -x^2 \ln x + x^2 - \ln x - 1 (x > 1)$ ， $\varphi'(x) = -2x \ln x + x - \frac{1}{x}$ ，

$\varphi''(x) = -2 \ln x - 1 + \frac{1}{x^2} = -2 \ln x + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) < 0$ ，

所以 $\varphi'(x) < \varphi'(1) = 0$ 即 $h'(x) < 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $a \geq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{2x} = \frac{1}{2}$ ，

故 $a \geq \frac{1}{2}$ 。

方法二：注意到 $x=1$ 时，恰有 $f(x) - g(x) = 0$ ，

令 $F(x) = f(x) - g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - a(x-1)$ ，

则 $F'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} - a = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} - a$ ，

所以 $F(x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立的必要条件为 $F'(1) \leq 0$ ，即 $\frac{2}{4} - a \leq 0$ ，所以

$a \geq \frac{1}{2}$ ，

下面证明：当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时，

$F(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - a(x-1) \leq \frac{x \ln x}{x+1} - \frac{1}{2}(x-1) = h(x)$ ，

$h'(x) = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x+2+2\ln x - (x+1)^2}{2(x+1)^2}$ ，

令 $\varphi(x) = 2x+2+2\ln x - (x+1)^2$ ，

$\varphi'(x) = 2 + \frac{2}{x} - 2(x+1) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1-x^2)}{x} \leq 0$ 即 $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递减，

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$ 恒成立，即 $a \geq \frac{1}{2}$ 也是充分条件，故有 $a \geq \frac{1}{2}$ 。

(2) 不妨设 $S_n = \ln(2n+1)$ 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，则 $a_n = \ln \frac{2n+1}{2n-1}$ ，

要证原不等式，只需证 $\ln \frac{2n+1}{2n-1} \leq \frac{4n}{4n^2-1}$ ，

而由 (2) 知：当 $a = \frac{1}{2}$ 时恒有 $f(x) \leq g(x)$ ，

即 $x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ 当且仅当 $x=1$ 时取等号，

取 $x = \frac{2n+1}{2n-1} > 1$ ，则 $\frac{2n+1}{2n-1} \ln \frac{2n+1}{2n-1} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^2 - 1 \right]$ ，

即 $\frac{2n+1}{2n-1} \ln \frac{2n+1}{2n-1} \leq \frac{1}{2} \frac{8n}{(2n-1)^2}$ ，即 $\ln \frac{2n+1}{2n-1} \leq \frac{4n}{(2n-1)^2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ ，

即 $\ln \frac{2n+1}{2n-1} \leq \frac{4n}{4n^2-1}$ 成立，从而原不等式获证。

【标注】【知识点】导数的几何意义；已知切线方程求参数；导数与最值；二阶导问题；通过构造函数证明不等式