

导数综合 (二)

一、极值点与零点相关不等式

1. 典型例题

🔗 构造函数

1. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{x} - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证 : $2 < x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$.

2. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - k - 1)$, $k \in \mathbf{R}$.

若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 : $x_1 \cdot x_2 < e^{2k}$.

🔗 构造齐次型进行消元

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

若函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明 $\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} > 2$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + 2(a-1)\ln x$, $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + (4-2a)\ln x$.

记 $f(x) = f(x) + g(x)$, 如果 x_1, x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点 , 且 $x_1 < x_2 < 4x_1$, $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数 , 证明 : $h'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right) > 0$.

5. 设函数 $f(x) = e^x - ax + a (a \in \mathbf{R})$.

在(2)的条件下 , 证明 : $f'(\sqrt{x_1x_2}) < 0$ ($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数) .

🔗 利用零点处切线进行放缩

6. 已知函数 $f(x) = nx - x^n (x \in \mathbf{R})$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

(1) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证 : 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 , 求证 : $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$.

🔗 确定零点、极值点以及特殊点的大小关系进行放缩

7. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

利用极值点间的关系进行消元

8. 已知函数 $f(x) = -\ln 2x - ax^2 + x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

若 $f(x)$ 由两个极值点 x_1, x_2 , 证明 : $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 4\ln 2$.

9. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ,

① 求实数 a 的范围 .

② 证明 : $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

2. 巩固练习

构造函数

10. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点 .

设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点 , 证明 : $x_1 + x_2 < 2$.

构造齐次型进行消元

11. 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证 : $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

12. 已知直线 $y = \frac{1}{e}$ 是函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 的切线 (其中 $e = 2.71828$) .

若函数 $g(x) = \ln f(x) - b$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 证明 : $g'(x_1) + g'(x_2) > g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

13. 设函数 $f(x) = x^2 - a \ln x - (a-2)x$.

若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 .

① 求满足条件的最小正整数 a 的值 .

② 求证 : $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$.

利用零点处切线进行放缩

14. 已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$) , 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为

$$(e-1)x + ey + e - 1 = 0 .$$

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 : $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

确定零点、极值点以及特殊点的大小关系进行放缩

15. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 恰有两个不同的实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$.

利用极值点间的关系进行消元

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln(1-x)$, a 为常数.

若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $f(x_2) - x_1 > -\frac{3 + \ln 4}{8}$.

二、数列相关不等式

1. 典型例题

18. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, 求正数 a 的取值范围.

(2) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

19. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 证明: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k - f(k)} > \frac{3n^2 - n - 2}{n(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$). (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$.)

2. 巩固练习

20. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

证明: $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$).

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ 与 $g(x) = a(x-1)$.

(1) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求证: $\ln(2n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{4i}{4i^2-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).