

导数综合 (三) 练习题

1. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.
 - (1) 求 $f(x)$ 的单调区间.
 - (2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.
 - ① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0.
 - ② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.
2. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.
 - (1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;
 - (2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.
3. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.
 - (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
 - (2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 求 b 的最大值.
 - (3) 已知 $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值 (精确到 0.001).
4. 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
 - (1) 若 $a = b = c$, $f(4) = 8$, 求 a 的值.
 - (2) 若 $a \neq b$, $b = c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值.
 - (3) 若 $a = 0$, $0 < b \leq 1$, $c = 1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.
5. 设函数 $f(x) = (x+a) \ln x$, $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x - y = 0$ 平行.
 - (1) 求 a 的值.
 - (2) 是否存在自然数 k , 使得方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(k, k+1)$ 内存在唯一的根? 如果存在, 求出 k ; 如果不存在, 请说明理由.
 - (3) 设函数 $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, ($\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值), 求 $m(x)$ 的最大值.
6. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ($a > 0, b \in \mathbf{R}$) 有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.
(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)
 - (1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域.
 - (2) 证明: $b^2 > 3a$.
 - (3) 若 $f(x), f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\frac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.
7. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性；
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$ ，求 a 的取值范围．
8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ ．
- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等，证明： $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8 \ln 2$ ．
- (2) 若 $a \leq 3 - 4 \ln 2$ ，证明：对于任意 $k > 0$ ，直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点．
9. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$ ，其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$ ，且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列．
- (1) 若 $t_2 = 0, d = 1$ ，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程．
- (2) 若 $d = 3$ ，求 $f(x)$ 的极值．
- (3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点，求 d 的取值范围．
10. 设 a 为实数，函数 $f(x) = (x - a)^2 + |x - a| - a(a - 1)$ ．
- (1) 若 $f(0) \leq 1$ ，求 a 的取值范围；
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (3) 当 $a \geq 2$ 时，讨论 $f(x) + \frac{4}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的零点个数．
11. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$ (k 为常数， $e = 2.71828\dots$ 是自然对数的底数)，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行．
- (1) 求 k 的值．
- (2) 求 $f(x)$ 单调区间．
- (3) 设 $g(x) = (x^2 + x)f'(x)$ ，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，证明：对任意 $x > 0$ ， $g(x) < 1 + e^{-2}$ ．
12. 设 $f(x) = \ln(x + 1) + \sqrt{x + 1} + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ ， a, b 为常数)，曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 在 $(0, 0)$ 点相切．
- (1) 求 a, b 的值；
- (2) 证明：当 $0 < x < 2$ 时， $f(x) < \frac{9x}{x + 6}$ ．
13. 已知函数 $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ ．
- (1) 若直线 $y = kx + 1$ 与 $f(x)$ 的反函数的图象相切，求实数 k 的值．
- (2) 设 $x > 0$ ，讨论曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数．
- (3) 设 $a < b$ ，比较 $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小，并说明理由．
14. 已知 a 为正实数， n 为自然数，抛物线 $y = -x^2 + \frac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A ．设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距．
- (1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$ ；

(2) 求对所有 n 都有 $\frac{f(n)-1}{f(n)+1} \geq \frac{n}{n+1}$ 成立的 a 的最小值；

(3) 当 $0 < a < 1$ 时，比较 $\frac{1}{f(1)-f(2)} + \frac{1}{f(2)-f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(n)-f(2n)}$ 与
6. $\frac{f(1)-f(n+1)}{f(0)-f(1)}$ 的大小，并说明理由。