

导数综合（一）练习题

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = 0$ 时, 证明: $f(x) < 2e^x - x - 4$ (其中 e 为自然对数的底数) . .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 当 $a = 0$ 时, 由 $f(x) < 2e^x - x - 4$,

只需证明 $e^x > \ln x + 2$,

令 $h(x) = e^x - \ln x - 2 (x > 0)$,

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x},$$

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ 故 } h'(x) \text{ 递增},$$

$$h'(1) = e - 1 > 0, h'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0,$$

故存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

$$\text{即 } e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0,$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增,

故 $x = x_0$ 时, $h(x)$ 取得唯一的极小值, 也是最小值,

$h(x)$ 的最小值是 $h(x) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2$

$$= \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 0, \left(0 < x_0 < 1, e^{x_0} \neq \frac{1}{x_0}\right).$$

【标注】【知识点】二阶导问题; 通过构造函数证明不等式; 隐零点问题

2. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 由 (1) 知, $a = 1$ 时,

$$f(x) - f'(x) = x - \ln x + \frac{2x-1}{x^2} - \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= x - \ln x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1, x \in [1, 2].$$

$$\text{令 } g(x) = x - \ln x, h(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1, x \in [1, 2].$$

$$\text{则 } f(x) - f'(x) = g(x) + h(x).$$

由 $g'(x) = \frac{x-1}{x} \geq 0$ 可得 $g(x) \geq g(1) = 1$ ，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立。

$$\text{又 } h'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{x^4},$$

设 $\varphi(x) = -3x^2 - 2x + 6$ ，则 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 内单调递减。

$$\text{因为 } \varphi(1) = 1, \varphi(2) = -10,$$

则在 $[1, 2]$ 上存在 x_0 使得 $x \in (1, x_0)$ 时， $\varphi(x) > 0$ ， $x \in (x_0, 2)$ 时， $\varphi(x) < 0$ ，

则函数 $h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, 2)$ 上单调递减。

$$\text{由于 } h(1) = 1, h(2) = \frac{1}{2},$$

则 $h(x) \geq h(2) = \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $x = 2$ 时等号成立。

$$\text{故 } f(x) - f'(x) > g(1) + h(2) = \frac{3}{2},$$

即 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立。

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；通过构造函数证明不等式；利用导数求函数的单调性、单调区间

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$ 。

当 $a < 0$ 时，证明 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) 由 (1) 知，当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 在 $x \in \left(0, -\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在

$x \in \left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减，

$$\therefore f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{2a}\right).$$

$$\text{即 } f(x) \leq f\left(-\frac{1}{2a}\right).$$

$$\text{令 } g(a) = f\left(-\frac{1}{2a}\right) - \left(-\frac{3}{4a} - 2\right)$$

$$= \ln\left(-\frac{1}{2a}\right) + a \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + (2a+1)\left(-\frac{1}{2a}\right) + \frac{3}{4a} + 2$$

$$= \frac{1}{2a} + 1 - \ln(-2a) \quad (a < 0)$$

$$g'(a) = -\frac{1}{2a^2} - \frac{-2}{-2a} = \frac{-2a-1}{2a^2}$$

当 $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时， $g'(a) > 0$ ， $g(a)$ 单调递增；

当 $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 时， $g'(a) < 0$ ， $g(a)$ 单调递减。

$$\therefore g(a)_{\max} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 - 0 = 0.$$

$\therefore g(a) \leq 0$ 在 $a < 0$ 时恒成立。

$$\text{即 } f\left(-\frac{1}{2a}\right) \leq -\frac{3}{4a} - 2 \text{ 在 } a < 0$$

$$\text{即 } f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2 (a < 0).$$

∴原不等式得证.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数求函数的最值；通过构造函数证明不等式

4. 证明： $(x^2 + x) \frac{(\frac{1}{x} - \ln x - 1)}{e^x} < 1 + e^{-2}.$

【答案】证明见解析.

【解析】 $(x^2 + x) \frac{(\frac{1}{x} - \ln x - 1)}{e^x} < 1 + e^{-2} \Leftrightarrow 1 - x \ln x - x < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2}),$

设 $p(x) = 1 - x \ln x - x$, $P'(x) = -1 - \ln x - 1 = -\ln x - 2.$

令 $p(x) > 0 \Rightarrow -\ln x - 2 > 0 \Rightarrow x < e^{-2},$

∴ $p(x)$ 在 $(0, e^{-2})$ 单调递增, 在 $(e^{-2}, +\infty)$ 单调递减,

∴ $p(x) < p(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$, 即 $1 - x \ln x - x < 1 + e^{-2}.$

若要证 $1 - x \ln x - x < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$, 只需证 $\frac{e^x}{x+1} > 1 \Leftrightarrow e^x > x + 1.$

设 $q(x) = e^x - x - 1$, $q'(x) = e^x - 1$, 令 $q(x) > 0$, 解得: $x > 0.$

∴ $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

∴ $q(x) > q(0) = 0,$

∴ $e^x > x + 1 \Rightarrow \frac{e^x}{x+1} > 1,$

∴ $1 - x \ln x - x < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$, 即原不等式得证.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbf{R}.$

(1) 令 $g(x) = f(x) - x^2$, 是否存在实数 a , 当 $x \in (0, e]$ (e 是自然常数) 时, 函数 $g(x)$ 的最小值是 3, 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由;

(2) 当 $x \in (0, e]$ 时, 证明: $e^2 x^2 - \frac{5}{2} x > (x+1) \ln x.$

【答案】 (1) 存在实数 $a = e^2$, 理由见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 假设存在实数 a , 使 $g(x) = ax - \ln x (x \in (0, e])$ 有最小值 3,

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x},$$

①当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$, $a = \frac{4}{e}$ (舍去),

②当 $0 < \frac{1}{a} < e$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, e]$ 上单调递增,
 $\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a = 3$, $a = e^2$, 满足条件.

③当 $\frac{1}{a} \geq e$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$, $a = \frac{4}{e}$ (舍去),

综上, 存在实数 $a = e^2$, 使得当 $x \in (0, e]$ 时 $g(x)$ 有最小值3.

(2) 令 $F(x) = e^2x - \ln x$, 由(2)知, $F(x)_{\min} = 3$.

令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x \leq e$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增,

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(e) = \frac{1}{e} + \frac{5}{2} < \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$,

$\therefore e^2x - \ln x > \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, 即 $e^2x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x$.

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围; 利用导数求函数的最值; 通过构造函数证明不等式

6. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

【答案】(1) $y = (e-2)x + 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $f'(x) = e^x - 2x$, 由题设得 $f'(1) = e - 2$, $f(1) = e - 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)x + 1$.

(2) $f'(x) = e^x - 2x$, $f''(x) = e^x - 2$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) \geq f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = e - 1$, $x \in [0, 1]$. $f(x)$ 过点 $(1, e-1)$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)x + 1$,

故可猜测: 当 $x > 0$, $x \neq 1$ 时, $f(x)$ 的图象恒在切线 $y = (e-2)x + 1$ 的上方.

易证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (e-2)x + 1$,

设 $g(x) = f(x) - (e-2)x - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - 2x - (e-2)$,

$g''(x) = e^x - 2$, $g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 又

$$g'(0) = 3 - e > 0, g'(1) = 0, 0 < \ln 2 < 1, \therefore g'(\ln 2) < 0,$$

所以, 存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

所以, 当 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } g(0) = g(1) = 0,$$

$\therefore g(x) = e^x - x^2 - (e-2)x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 故

$$\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq x, x > 0.$$

又 $x \geq \ln x + 1$, 即 $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$, 当 $x = 1$ 时, 等号成立.

【标注】【知识点】导数的实际应用; 导数与单调性

7. 已知 $f(x) = e^x - ax^2$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x + (1-e)x - x \ln x - 1 \geq 0$.

【答案】 (1) $a = 1, b = e - 2$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x) = e^x - ax^2$, 由题设得 $f'(1) = e - 2a = b, f(1) = e - a = b + 1$,

解得 $a = 1, b = e - 2$.

(2) 因为 $f(0) = 1$, 又由 (1) 知, $f(x)$ 过点 $(1, e - 1)$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e - 2)x + 1$,

故可猜测: 当 $x > 0, x \neq 1$ 时, $f(x)$ 的图象恒在切线 $y = (e - 2)x + 1$ 的上方.

下证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (e - 2)x + 1$,

设 $g(x) = f(x) - (e - 2)x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 2x - (e - 2), g''(x) = e^x - 2$,

由 (1) 知, $g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } g'(0) = 3 - e > 0, g'(1) = 0, 0 < \ln 2 < 1, \therefore g'(\ln 2) < 0,$$

所以, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

所以当 $x \in (0, x_0)$ 和 $(1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(0) = f(1) = 0,$$

$\therefore g(x) = e^x - x^2 - (e - 2)x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 故

$$\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq x, x \geq 0,$$

由(2)知, $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq x \geq \ln x + 1$, 即 $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$,

所以, $e^x + (2-e)x - 1 \geq x \ln x + x$, 即 $e^x + (1-e)x - x \ln x - 1 \geq 0$ 成立,
当 $x = 1$ 时, 等号成立.

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式; 二阶导问题

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + \ln x$, 其中 $a > 0$.

若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 证明对任意 $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] (x_1 \neq x_2)$, $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{x_1^2 - x_2^2} < \frac{1}{2}$ 恒成立.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $\because 0 < a < \frac{1}{2}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 内是减函数,

又 $x_1 \neq x_2$,

不妨设 $0 < x_1 < x_2$,

则 $f(x_1) > f(x_2)$,

$x_1^2 < x_2^2$,

$\therefore \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{x_1^2 - x_2^2} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f(x_1) - \frac{1}{2}x_1^2 > f(x_2) - \frac{1}{2}x_2^2$,

令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = \ln x - \left(a + \frac{1}{a}\right)x$,

$g'(x) = \frac{1}{x} - \left(a + \frac{1}{a}\right)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上递减,

$\therefore g'(x) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(a + \frac{1}{a}\right) \leq 2 - 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上为减函数,

$\therefore$ 对 $\forall \frac{1}{2} < x_1 < x_2 < 1$, 有 $g(x_1) > g(x_2)$,

即 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] (x_1 \neq x_2)$,

$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{x_1^2 - x_2^2} < \frac{1}{2}$ 恒成立.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

9. 已知函数 $f(x) = 2(a+1)\ln x - ax$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$.

证明：若 $-1 < a < 7$ ，则对于任意 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ， $x_1 \neq x_2$ ，有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} > -1$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

【解析】 (1) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，

$\because x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ，不妨设 $x_1 > x_2$ ，

$\therefore g(x_1) > g(x_2)$ ，

$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} > -1$

$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > -g(x_1) + g(x_2)$

$\Leftrightarrow f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$ 。

设 $h(x) = f(x) + g(x) = 2(a+1)\ln x - ax + \frac{1}{2}x^2 + x$ ，

则 $h'(x) = \frac{2(a+1)}{x} - a - 1 + x$

$= \frac{2(a+1)}{x} + x - (a+1)$ ，

$\because -1 < a < 7$ ，

$\therefore a+1 > 0$ ，

$\therefore \frac{2(a+1)}{x} + x \geq 2\sqrt{2(a+1)}$ (当且仅当 $x^2 = 2(a+1)$ 时等号成立)。

$\therefore h'(x) \geq 2\sqrt{2(a+1)} - (a+1) = 2 - (\sqrt{a+1} - \sqrt{2})^2$ ，

$\because -1 < a < 7$ ，

$\therefore 2 - (\sqrt{a+1} - \sqrt{2})^2 > 0$ ，

$\therefore h'(x) > 0$ 。

$\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，

$\therefore f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$ 。

$\therefore$ 原式成立。

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；双变量问题