

导数综合 (一) 练习题

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x (a \in \mathbf{R})$.

当 $a = 0$ 时, 证明: $f(x) < 2e^x - x - 4$ (其中 e 为自然对数的底数) . .

2. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立 .

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$.

4. 证明: $(x^2 + x) \frac{(\frac{1}{x} - \ln x - 1)}{e^x} < 1 + e^{-2}$.

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 令 $g(x) = f(x) - x^2$, 是否存在实数 a , 当 $x \in (0, e]$ (e 是自然常数) 时, 函数 $g(x)$ 的最小值是 3, 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由;

(2) 当 $x \in (0, e]$ 时, 证明: $e^2 x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x$.

6. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 求证: 当 $x > 0$ 时, $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

7. 已知 $f(x) = e^x - ax^2$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x + (1-e)x - x \ln x - 1 \geq 0$.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + \ln x$, 其中 $a > 0$.

若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 证明对任意 $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] (x_1 \neq x_2)$, $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{x_1^2 - x_2^2} < \frac{1}{2}$ 恒成立 .

9. 已知函数 $f(x) = 2(a+1)\ln x - ax$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$.

证明: 若 $-1 < a < 7$, 则对于任意 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} > -1$.