

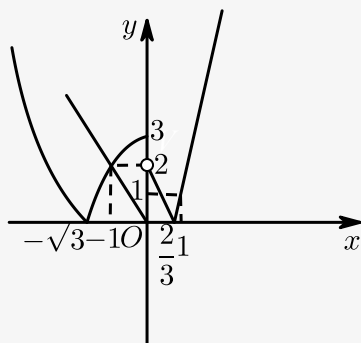
第四讲-函数零点综合（二）练习题

一、恒成立问题

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 0 \\ 3x - 2, & x > 0 \end{cases}$, 若 $|f(x)| > ax$, 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围 _____ .

【答案】 $(-2, 0)$

【解析】 作出函数 $y = |f(x)|$ 及 $y = ax$ 的图象如图,



由图可知, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 要使 $|f(x)| > ax$ 恒成立, 则 $-2 < a < 0$.

故答案为: $(-2, 0)$.

【标注】 【知识点】 分段函数

【知识点】 含绝对值的不等式

【知识点】 不等式中的恒成立与能成立问题

【思想】 分类讨论思想

【思想】 数形结合思想

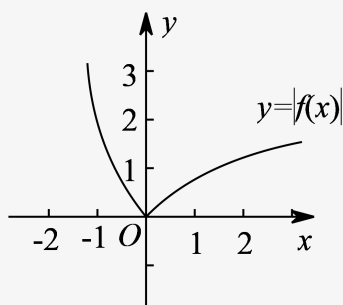
【素养】 直观想象

【方法】 图象法

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 若对 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $|f(x)| \geq ax$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-2, 0]$ C. $[-2, 1]$ D. $(-\infty, 1]$

【答案】 B

【解析】 由 $y = |f(x)|$ 的图像知:



①当 $x > 0$ 时, $y = ax$, 只有 $a \leq 0$ 时, 才有可能满足 $|f(x)| \geq ax$, 可排除C, D.

②当 $x \leq 0$ 时, $y = |f(x)| = |-x^2 + 2x| = x^2 - 2x$,

故由 $|f(x)| \geq ax$ 得 $x^2 - 2x \geq ax$.

当 $x = 0$ 时, 不等式为 $0 \geq 0$ 成立.

当 $x < 0$ 时, 不等式等价于 $x - 2 \leq a$. $\because x - 2 < -2$, $\therefore a \geq -2$.

综上所述, $a \in [-2, 0]$.

故选: B.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】一元二次不等式

【知识点】函数求值问题

【知识点】分段函数

二、综合创新

🔗 对称点问题

3. 已知函数 $f(x) = kx$, $g(x) = 2\ln x + 2e\left(\frac{1}{e} \leq x \leq e^2\right)$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象上分别存在点 M , N

关于直线 $y = e$ 对称, 则实数 k 的取值范围是().

- A. $\left[-\frac{2}{e}, -\frac{4}{e^2}\right]$
- B. $\left[-\frac{4}{e^2}, 2e\right]$
- C. $\left[-\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$
- D. $\left[-\frac{2}{e}, 2e\right]$

【答案】 D

【解析】 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $N(x_0, 2e - y_0)$,

$$\therefore y_0 = kx_0, 2e - y_0 = 2\ln x_0 + 2e\left(\frac{1}{e} \leq x_0 \leq e^2\right),$$

设 $h(x) = -\frac{2 \ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x^2}$,

当 $\frac{1}{e} \leq x < e$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

故 $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2 \right]$ 时, $h(x)$ 的最小值为 $h(e) = -\frac{2}{e}$,

$$h(x) \text{ 的最大值为 } h\left(\frac{1}{e}\right) = 2e.$$

故选D.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2}$ ($x < 1$) 与 $g(x) = x^2 + \ln(x + a)$ 的图象上存在关于 $x = 1$ 对称的点, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, \sqrt{e} - 1)$
B. $(\sqrt{e} - 1, +\infty)$
C. $(-\infty, \sqrt{e} + 1)$
D. $(\sqrt{e} + 1, +\infty)$

$(2-x, y)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上, 代入解得 $y = x^2 + \frac{1}{2}$, 即 $h(x) = x^2 + \frac{1}{2}$;

即 $\ln(1+a) < \frac{1}{2}$, 解得 $a < \sqrt{e} - 1$.

5.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0, \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0, \end{cases}$ $g(x) = kx - 1$, $f(x)$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线

$y = -1$ 的对称点在 $g(x)$ 的图象上, 则 k 的取值范围是 () .

- A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【答案】 D

【解析】 $y = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 的对称直线为 $y = mx - 1$ ($m = -k$), 先考虑特殊位置.

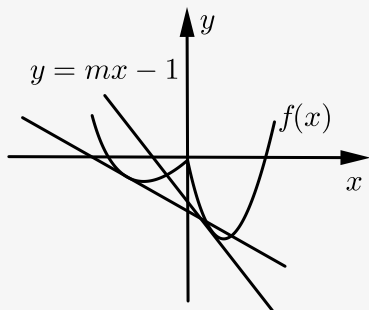
$y = mx - 1$ 与 $y = x^2 + \frac{3}{2}x$ ($x \leq 0$) 相切,

得 $\Delta = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (舍去正数),

$y = mx - 1$ 与 $y = x \ln x - 2x$, $x > 0$ 相切, 设切点为 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} y_0 = x_0 \ln x_0 - 2x_0 \\ y_0 = mx_0 - 1 \\ m = \ln x_0 - 1 \end{cases},$$

解得 $x_0 = 1$, $m = -1$,



结合图象可知, $-1 < m < -\frac{1}{2}$,

则 $\frac{1}{2} < k < 1$.

故选 D.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

存在性问题

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a, \\ x^2, & x > a \end{cases}$, 若存在实数 b , 使函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

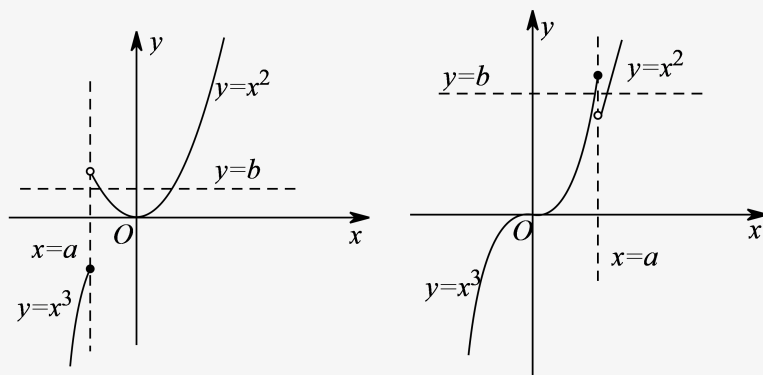
【解析】 当 $a < 0$ 时, 总存在 $y = b$ 与 $y = x^2$ 有两个交点, 如下左图;

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x)$ 为单调函数, 不符合题意,

当 $a > 1$ 时, $a^3 > a^2$,

总存在 $b \in (a^2, a^3)$, 使得方程 $f(x) = b$ 有两个不等的实根, 如下右图.

故答案为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.



【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 函数零点的概念

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 10, & x > a \\ x^2 + 2x, & x \leq a \end{cases}$ 若对任意实数 b , 函数 $g(x) = f(x) - b$ 都存在零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[-5, 11]$

【解析】 若函数 $g(x) = f(x) - b$ 总存在零点,

则 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

若 $a \leq -1$, 当 $x \leq a$ 时, $f(x) \in [a^2 + 2a, +\infty)$,

当 $x > a$ 时, $f(x) \in (-\infty, -a + 10)$,

于是有 $a^2 + 2a \leq -a + 10$, 解得 $-5 < a \leq -1$;

若 $a > -1$, 当 $x \leq a$ 时, $f(x) \in [-1, +\infty)$,

当 $x > a$ 时, $f(x) \in (-\infty, -a + 10)$,

于是有 $-a + 10 \geq -1$, 解得 $-1 < a \leq 11$.

综上 $a \in [-5, 11]$.

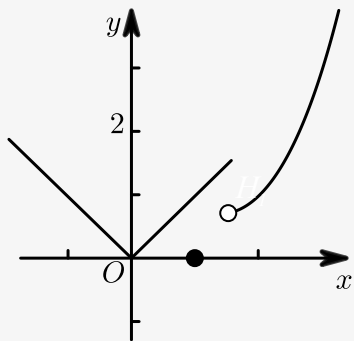
故答案为 $[-5, 11]$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 分段函数

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 2m, & x > m \end{cases} (m > 0)$, 若存在实数 b , 使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $(1, +\infty)$

【解析】 存在实数 b ，使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根，
即为函数 $y = f(x)$ 的图象和直线 $y = b$ 有 3 个不同的交点，



即有 $x > 0$ 时， $f(x)$ 不单调，
可得 $|m| > m^2 - 2m^2 + 2m$ ， $(m > 0)$ ，
即有 $m^2 > m$ ，
解得 $m > 1$ 。
故答案为： $(1, +\infty)$ 。

【标注】 【知识点】 分段函数；函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围

🔗 整体换元

9. 若存在正数 x, y ，使得 $(y - 2ex)(\ln y - \ln x)z + x = 0$ （其中 e 为自然对数的底数），则实数 z 的取值范围是 _____。

【答案】 $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

【解析】 则 $(y - 2ex)(\ln y - \ln x)z + x = 0$ 可化为： $\left(\frac{y}{x} - 2e\right) \ln\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{z}$ ，令 $t = \frac{y}{x}$ ，得
 $(t - 2e) \ln t = -\frac{1}{z}$ 。
令 $f(t) = (t - 2e) \ln t$ ， $(t > 0)$ ，
则 $f'(t) = g(t) = \ln t + 1 - \frac{2e}{t}$ ，
则 $g'(t) = \frac{t+1}{t^2}$ ，
故 $g(t)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数，
又因为 $f'(e) = g(e) = 1 + 1 - 2 = 0$ ，
故当 $t \in (0, e)$ 时， $f'(t) < 0$ ，当 $t > e$ 时， $f'(t) > 0$ ，
所以 $f(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减，在 $(e, +\infty)$ 上单调递增，
所以 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在最小值 $f(e) = -e$ ，

即 $f(t)$ 的值域为 $(-e, +\infty)$,
 $\therefore -\frac{1}{z} \in (-e, +\infty)$,
 所以 $z \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$,
 故填: $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值；利用导数求函数的零点及个数；函数零点的概念

10. 若关于 x 的方程 $(\ln x - ax)\ln x = x^2$ 存在三个不等实根，则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right)$
 B. $\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}, 0\right)$
 C. $\left(-\infty, \frac{1}{e} - e\right)$
 D. $\left(\frac{1}{e} - e, 0\right)$

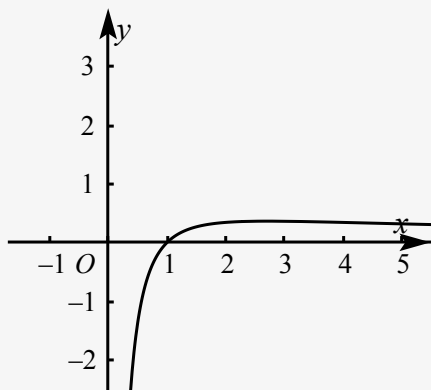
【答案】 C

【解析】 若关于 x 的方程 $(\ln x - ax)\ln x = x^2$ 等价于 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - \frac{a \ln x}{x} - 1 = 0$,

令 $t = \frac{\ln x}{x}$, $t^2 - at - 1 = 0$ 的两根一正一负 ,

由 $t = f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

在 $(0, e)$ 上递增 , 在 $(e, +\infty)$ 上递减 , $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$ 且 $x > e$ 时 , 结合 $f(x)$ 的图象可知 ,



要使关于 x 的方程 $(\ln x - ax)\ln x = x^2$ 存在三个不等实根 , 只需令 $t^2 - at - 1 = 0$ 的正根

$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ 满足 , $0 < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} < \frac{1}{e}$, 解得 $a \in \left(-\infty, \frac{1}{e} - e\right)$.

故选 C .

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合) ; 函数零点的概念 ; 直接求函数的单调性 (不含参)

● 复合函数零点

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & (x < 1) \\ \frac{\ln x}{x}, & (x \geq 1) \end{cases}$, 关于 x 的方程 $2[f(x)]^2 + (1 - 2m)f(x) - m = 0$, 有5个不同的实数解, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $\left\{-1, \frac{1}{e}\right\}$ B. $(0, +\infty)$
C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right]$

【答案】 C

【解析】 $2[f(x)]^2 + (1 - 2m)f(x) - m = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}$ 或 $f(x) = m$,

因为 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e$,

所以 $1 \leq x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x) \in \left[0, \frac{1}{e}\right)$;

$x \geq e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$;

而 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减;

$f(x) \in [-1, +\infty)$; $0 < x < 1$ 时 $f(x)$ 单调递增,

$f(x) \in [-1, 0)$; 因为 $f(x) = -\frac{1}{2}$ 有两个根,

则 $f(x) = m$ 需有3个根, 即 $m \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

故选C.

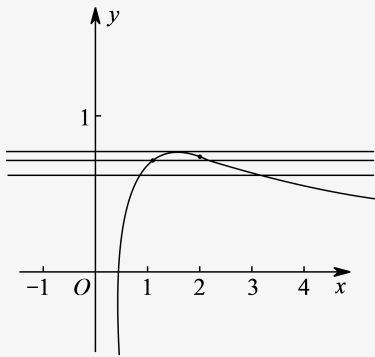
【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

12. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$, 关于 x 的不等式 $f^2(x) + af(x) > 0$ 只有两个整数解, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1}{3}, \ln 2\right]$ B. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right)$
C. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right]$ D. $\left(\frac{1}{3}\ln 6, \ln 2\right)$

【答案】 C

【解析】



函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2},$$

当 $f'(x) > 0$ 得 $1 - \ln(2x) > 0$, 即 $\ln(2x) < 1$,

即 $0 < 2x < e$, 即 $0 < x < \frac{e}{2}$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $1 - \ln(2x) < 0$, 得 $\ln(2x) > 1$,

即 $2x > e$, 即 $x > \frac{e}{2}$,

即当 $x = \frac{e}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 同时也是最大值 $f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\ln e}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$,

即当 $0 < x < \frac{e}{2}$ 时, $f(x) < \frac{2}{e}$ 有一个整数解1,

当 $x > \frac{e}{2}$ 时, $0 < f(x) < \frac{2}{e}$ 有无数个整数解,

若 $a = 0$, 则 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f^2(x) > 0$, 此时有无数个整数解, 不满足条件.

若 $a > 0$,

则由 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < -a$,

当 $f(x) > 0$ 时, 不等式由无数个整数解, 不满足条件.

当 $a < 0$ 时, 由 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f(x) > -a$ 或 $f(x) < 0$,

当 $f(x) < 0$ 时, 没有整数解,

则要使当 $f(x) > -a$ 有两个整数解,

$$\because f(1) = \ln 2, f(2) = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2, f(3) = \frac{\ln 6}{3},$$

$\therefore$ 当 $f(x) \geq \ln 2$ 时, 函数有两个整数点1, 2, 当 $f(x) \geq \frac{\ln 6}{3}$ 时, 函数有3个整数点1, 2, 3,

$\therefore$ 要使 $f(x) > -a$ 有两个整数解,

$$\text{则 } \frac{\ln 6}{3} \leq -a < \ln 2,$$

$$\text{即 } -\ln 2 < a \leq -\frac{1}{3}\ln 6.$$

故选C.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 利用导数求函数的零点及个数

整数解问题

13. 设函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - ax + 5 - a$, 若存在唯一的正整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 () .

A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$

B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right]$
D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$

【答案】 B

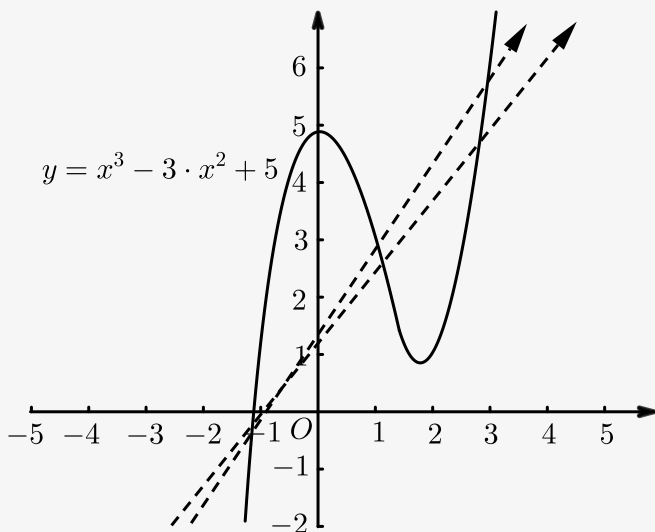
【解析】 解：设 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, $h(x) = a(x+1)$,

两个函数图象如图：要使存在唯一的正整数 x_0 ,

使得 $f(x_0) < 0$, 只要 $\begin{cases} g(1) \geq h(1) \\ g(2) < h(2) \\ g(3) \geq h(3) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 1 - 3 + 5 \geq 2a \\ 8 - 12 + 5 < 3a \\ 27 - 27 + 5 \geq 4a \end{cases}$,

解得 $\frac{1}{3} < a \leq \frac{5}{4}$.

故选B .



【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(5-x) = f(3+x)$, 且 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2\ln x, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f^2(x) + (a+1)f(x) + a < 0$ 在 $[-20, 20]$ 上有且仅有 15 个整数解 , 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(-1, 2\ln 2 - 2]$

B. $[2\ln 3 - 3, 2\ln 2 - 2)$

C. $(2\ln 3 - 3, 2\ln 2 - 2]$

D. $[2 - 2\ln 2, 3 - 2\ln 3)$

【答案】 B

【解析】 $\because f(5-x) = f(3+x)$,

$\therefore$ 函数图象关于直线 $x=4$ 对称, 又函数为偶函数,

$\therefore$ 函数是周期函数, 且周期为 8, 区间 $[-20, 20]$ 含有 5 个周期,

关于 x 的不等式 $f^2(x) + (a+1)f(x) + a < 0$ 在 $[-4, 4]$ 上有 3 个整数解,

$x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 4x$ 是增函数,

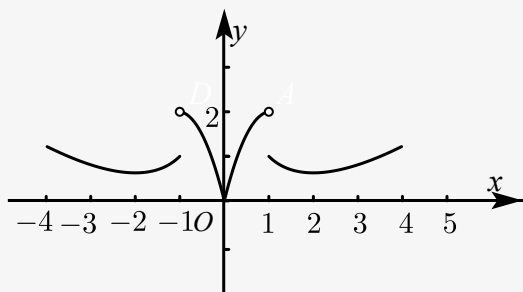
$x \in [1, 4]$ 时, $f(x) = x - 2\ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$,

$1 \leq x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

$2 < x \leq 4$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增,

$x=2$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(2) = 2 - 2\ln 2$, $f(1) = 1$, $f(3) = 3 - 2\ln 3 < 1$,

利用偶函数性质, 作出 $f(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上的图象, 如图,



由 $f^2(x) + (a+1)f(x) + a < 0$ 得 $[f(x)+1][f(x)+a] < 0$,

若 $-a \leq 0$, 则原不等式无解,

故 $-a > 0$, $-1 < f(x) < -a$,

要使得不等式 $-1 < f(x) < -a$ 在 $[-4, 4]$ 上有 3 个整数解,

则 $2 - 2\ln 2 < -a \leq 3 - 2\ln 3$,

即 $2\ln 3 - 3 \leq a < 2\ln 2 - 2$.

故选 B.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 零点、交点、根的等价转化; 函数零点的概念

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $|f(x)-a| + |f(x)-a-1| = 1$ 有且仅有三个不同的整数解, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{27}{19}\right)$

B. $[0, 8]$

C. $\left[-\frac{4}{7}, -\frac{8}{19}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$

【答案】A

【解析】当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$,

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= \frac{(2x)' \cdot (x^2+3) - 2x \cdot (x^2+3)'}{x^2+3} \\ &= \frac{2x^2+6-4x^2}{x^2+3} = \frac{6-2x^2}{x^2+3},\end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 解之得 $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (-\infty, -\sqrt{3}]$ 单调递减, 在 $x \in [-\sqrt{3}, 0]$ 单调递增,

$$\text{且 } f(-\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2 + 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \rightarrow 0$,

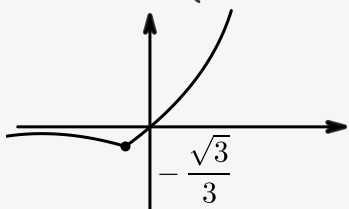
$$f(0) = \frac{2 \times 0}{0^2+3} = 0,$$

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^3$,

$\therefore f'(x) = 3x^2 > 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore$ 可知 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$ 的大概图象如图,



令 $f(x) = t$, $g(t) = |t-a| + |t-a-1| - 1$,

$\therefore |f(x)-a| + |f(x)-a-1| = 0$ 有且仅有三个不同的整数解,

$\therefore$ 即 $g(t) = 0$, 有且仅有三个不同的整数解,

令 $g(f(x)) = |f(x)-a| + |f(x)-a-1| - 1$,

$\therefore |f(x)-a| + |f(x)-a-1| = 1$ 有且仅有三个不同的整数解,

$\therefore$ 即 $g(f(x)) = 0$ 有且仅有三个不同的整数解,

① 当 $f(x) > a+1$ 时,

$$g(f(x)) = f(x) - a + f(x) - a - 1 - 1 = 2f(x) - 2a - 2 = 0,$$

解之得 $f(x) = a+1$, 与条件矛盾,

② 当 $a \leq f(x) \leq a+1$ 时,

$$g(f(x)) = f(x) - a + a + 1 - f(x) - 1 = 0 \text{ 恒成立},$$

③ 当 $f(x) < a$ 时,

$$g(f(x)) = a - f(x) + a + 1 - f(x) - 1 = 2a - 2f(x) = 0,$$

解之得 $f(x) = a$, 与条件矛盾,

$\therefore$ 可知 $g(f(x)) = 0$ 有且仅有三个不同的整数解时,

$a \leq f(x) \leq a+1$ 有且仅有三个不同的整数解，

$\therefore$ 结合 $f(x)$ 图象可知此时 $f(x) < 0$ ，

$$\text{又} \because f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f(-1) = \frac{2 \times (-1)}{(-1)^2 + 3} = -\frac{1}{2}, \quad f(-2) = \frac{2 \times (-2)}{(-2)^2 + 3} = -\frac{4}{7},$$

$$f(-3) = \frac{2 \times (-3)}{(-3)^2 + 3} = -\frac{1}{2}, \quad f(-4) = \frac{2 \times (-4)}{(-4)^2 + 3} = -\frac{8}{19},$$

$$0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} < a+1-a,$$

$$\therefore \text{可知此时}, -\frac{1}{2} \leq a+1 < -\frac{8}{19},$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq a < -\frac{19}{27},$$

$$\text{故 } a \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{19}{27}\right).$$

故选A.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；分段函数；已知零点情况求参数的取值范围