

第四讲-函数零点综合（二）练习题

一、恒成立问题

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 0 \\ 3x - 2, & x > 0 \end{cases}$, 若 $|f(x)| > ax$, 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围 _____ .
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 若对 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $|f(x)| \geq ax$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-2, 0]$ C. $[-2, 1]$ D. $(-\infty, 1]$

二、综合创新

对称点问题

3. 已知函数 $f(x) = kx$, $g(x) = 2\ln x + 2e\left(\frac{1}{e} \leq x \leq e^2\right)$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象上分别存在点 M, N 关于直线 $y = e$ 对称, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $\left[-\frac{2}{e}, -\frac{4}{e^2}\right]$
B. $\left[-\frac{4}{e^2}, 2e\right]$
C. $\left[-\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$
D. $\left[-\frac{2}{e}, 2e\right]$
4. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2}$ ($x < 1$) 与 $g(x) = x^2 + \ln(x+a)$ 的图象上存在关于 $x = 1$ 对称的点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, \sqrt{e} - 1)$ B. $(\sqrt{e} - 1, +\infty)$
C. $(-\infty, \sqrt{e} + 1)$ D. $(\sqrt{e} + 1, +\infty)$
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0, \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0, \end{cases} g(x) = kx - 1$, $f(x)$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $g(x)$ 的图象上, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

存在性问题

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$, 若存在实数 b , 使函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是 _____.
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 10, & x > a \\ x^2 + 2x, & x \leq a \end{cases}$ 若对任意实数 b , 函数 $g(x) = f(x) - b$ 都存在零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 2m, & x > m \end{cases} (m > 0)$, 若存在实数 b , 使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.

整体换元

9. 若存在正数 x, y , 使得 $(y - 2ex)(\ln y - \ln x)z + x = 0$ (其中 e 为自然对数的底数), 则实数 z 的取值范围是 _____.
10. 若关于 x 的方程 $(\ln x - ax)\ln x = x^2$ 存在三个不等实根, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(-\infty, \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right)$
 B. $\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}, 0\right)$
 C. $\left(-\infty, \frac{1}{e} - e\right)$
 D. $\left(\frac{1}{e} - e, 0\right)$

复合函数零点

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & (x < 1) \\ \frac{\ln x}{x}, & (x \geq 1) \end{cases}$, 关于 x 的方程 $2[f(x)]^2 + (1 - 2m)f(x) - m = 0$, 有 5 个不同的实数解, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $\left\{-1, \frac{1}{e}\right\}$
 B. $(0, +\infty)$
 C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
 D. $\left(0, \frac{1}{e}\right]$
12. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$, 关于 x 的不等式 $f^2(x) + af(x) > 0$ 只有两个整数解, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\left(\frac{1}{3}, \ln 2\right]$
 B. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right)$
 C. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right]$
 D. $\left(\frac{1}{3}\ln 6, \ln 2\right)$

整数解问题

13. 设函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - ax + 5 - a$, 若存在唯一的正整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
 C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$

B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right]$
 D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(5-x) = f(3+x)$ ，且 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2\ln x, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ ，若关于 x 的不等式 $f^2(x) + (a+1)f(x) + a < 0$ 在 $[-20, 20]$ 上有且仅有15个整数解，则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(-1, 2\ln 2 - 2]$

B. $[2\ln 3 - 3, 2\ln 2 - 2)$

C. $(2\ln 3 - 3, 2\ln 2 - 2]$

D. $[2 - 2\ln 2, 3 - 2\ln 3)$

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $|f(x) - a| + |f(x) - a - 1| = 1$ 有且仅有三个不同的整数解，则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{27}{19}\right)$
 C. $\left[-\frac{4}{7}, -\frac{8}{19}\right)$

B. $[0, 8]$

D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$