

第二讲-指数对数比大小练习题

一、指数对数比大小

1. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 因为 $a = 2^{-\frac{1}{3}} \in (0, 1)$, $b = \log_2 \frac{1}{3} \in (-\infty, 0)$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 \in (1, +\infty)$, 所以 $c > a > b$.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小；对数函数的图象及性质；指数函数的图象及性质

2. 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 $\because c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5$, $a = \log_3 \frac{7}{2}$,

又 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore \log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2} > \log_3 3 = 1$,

$\therefore c > a > 1$,

$\because y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$, 即 $b < 1$,

$\therefore c > a > b$,

故选D.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

3. 设 $a = \log_2 \pi$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \pi$, $c = \pi^{-2}$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $a = \log_2 \pi > \log_2 2 = 1$,

$$b = \log_{\frac{1}{2}} \pi < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0,$$

$$c = \pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2} \in (0, 1),$$

所以 $a > c > b$.

【标注】 【知识点】 对数函数的图象及性质；指数函数的图象及性质

【素养】 数学运算

4. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $\because 0 < a = 2^{-\frac{1}{3}} < 2^0 = 1$,

$$b = \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 1 = 0,$$

$$c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 2 = 1,$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选：C.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质

5. 设 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$, $b = \log_2 3$, $c = 2^{-0.3}$, 则 () .

A. $b > c > a$

B. $a > b > c$

C. $b > a > c$

D. $a > c > b$

【答案】 C

【解析】 易知 $b = \log_2 3 > 1$, $c = 2^{-0.3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3} < a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < 1$,

故 $b > a > c$.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质

6. 已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 那么 a, b, c 之间的大小关系为 () .

A. $b < c < a$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $a < b < c$

【答案】 D

【解析】 $\because \frac{1}{3} \in (0, 1)$,

$$\text{则 } a = \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0, b = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \in (0, 1), c = 2^{\frac{1}{3}} > 1,$$

那么 a, b, c 之间的大小关系为 $a < b < c$.

故选: D.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小; 指数函数的图象及性质

7. 设 $a = 1 - 2^{0.2}$, $b = \log_3 \frac{10}{3}$, $c = \lg 4$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a < c < b$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】 A

【解析】 $a = 1 - 2^{0.2} < 0$,

$$b = \log_3 \frac{10}{3} > 1,$$

$$0 < c = \lg 4 < 1,$$

故 $b > c > a$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质; 对数函数的图象及性质; 指对幂比较大小

8. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{5}}$, $b = \log_2 \frac{1}{5}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $\because 0 < 2^{-\frac{1}{5}} < 2^0 = 1$,

$$\log_2 \frac{1}{5} < \log_2 1 = 0,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1,$$

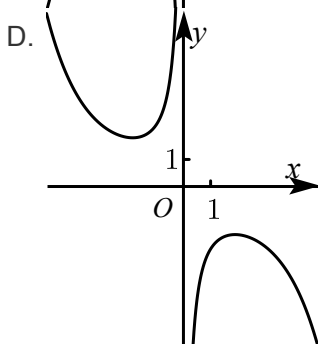
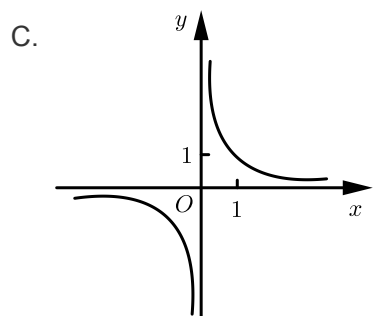
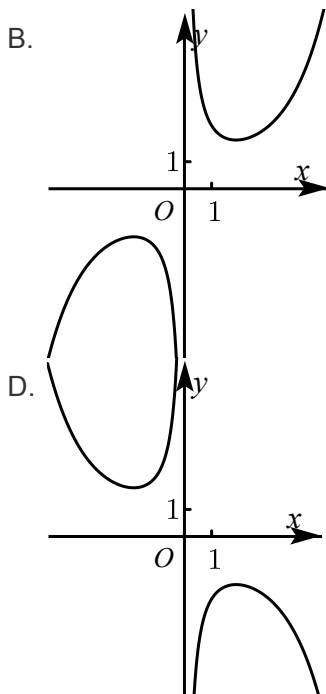
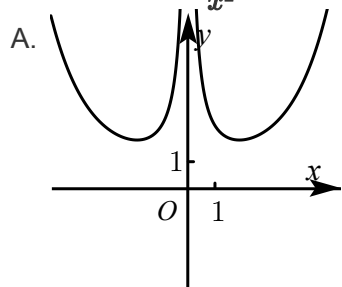
$\therefore c > a > b$.

故选: C

【标注】 【知识点】 对数的概念及其运算; 指对幂比较大小; 实数指数幂运算

二、函数图像

9. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ().



【答案】 B

【解析】 A. 函数 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = -f(x)$,

则函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 故 A 错误;

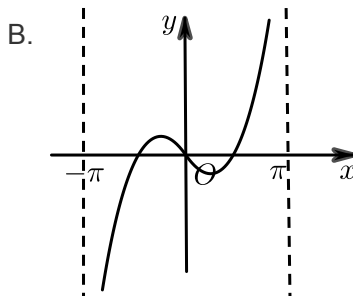
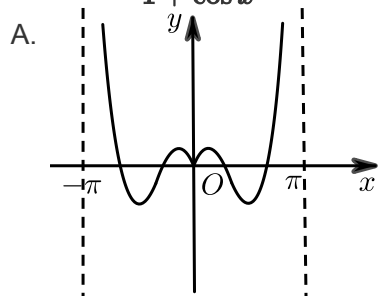
C. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 C 错误;

D. 当 $x = 1$ 时, $f(1) = e - \frac{1}{e} > 0$, 故 D 错误.

故选 B.

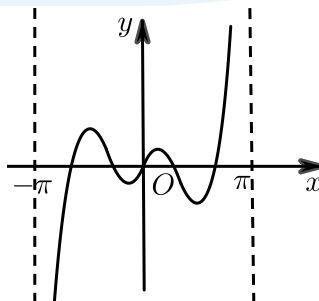
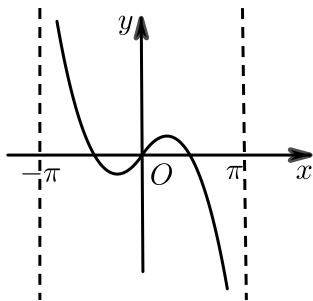
【标注】 【知识点】 利用极限判断函数图象

10. 函数 $y = \frac{\sin 3x}{1 + \cos x}$, $x \in (-\pi, \pi)$ 的图象大致为 ().



C.

D.



【答案】D

【解析】函数 $y = \frac{\sin 3x}{1 + \cos x}$ 满足 $f(-x) = \frac{-\sin 3x}{1 + \cos x} = -f(x)$

, 函数为奇函数, 排除A,

$$\text{由于 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = -1,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \pi}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = 0,$$

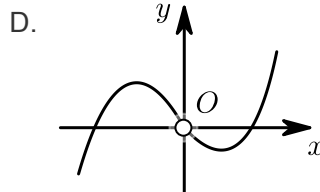
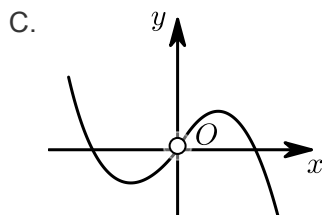
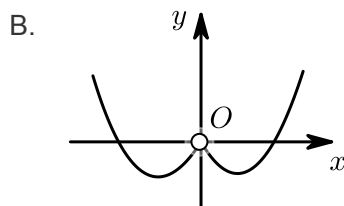
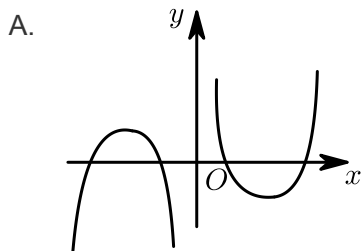
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin 2\pi}{1 + \cos \frac{2\pi}{3}} = 0$$

故排除B, C,

故选: D.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

11. 函数 $y = x \cdot \ln |x|$ 的大致图象是 ().



【答案】D

【解析】 $y = x \ln |x|$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x) = -x \ln |-x| = -x \ln x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = x \ln |x| \rightarrow +\infty$.

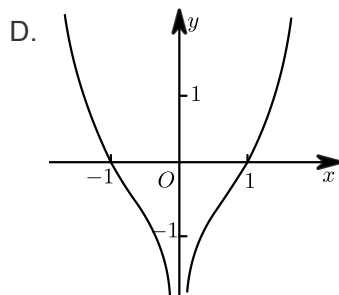
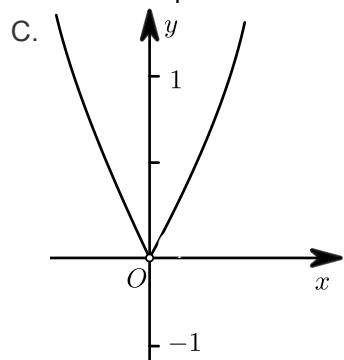
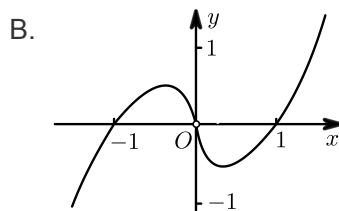
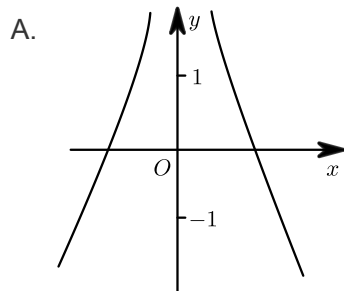
当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = x \ln |x| \rightarrow 0$.

故选D.

【标注】【知识点】图象法

【素养】直观想象

12. 已知函数 $f(x) = (2^x + 2^{-x}) \ln |x|$ 的图象大致为 ().



【答案】D

【解析】 $\because f(-x) = (2^{-x} + 2^x) \cdot \ln |-x|$

$$= (2^{-x} + 2^x) \cdot \ln |x| = f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数, 故排除B,

且当 $0 < x < 1$ 时, $2^x + 2^{-x} > 0$, $\ln |x| < 0$,

$\therefore$ 此时 $f(x) < 0$,

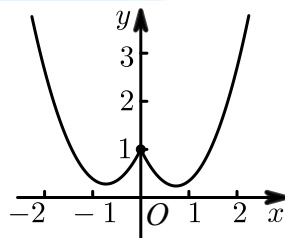
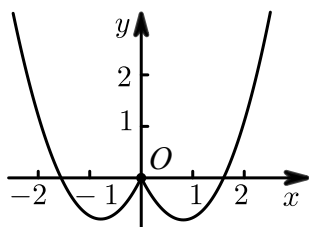
故选D.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题; 图象法

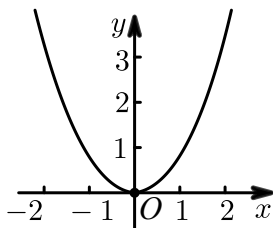
13. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 - 2|x|$ 的大致图象为 ().

A.

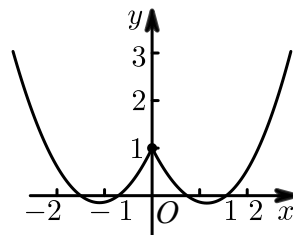
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 $f(1) = \sin 1 + 1 - 2 = \sin 1 - 1 < 0$ ，排除 B，C，

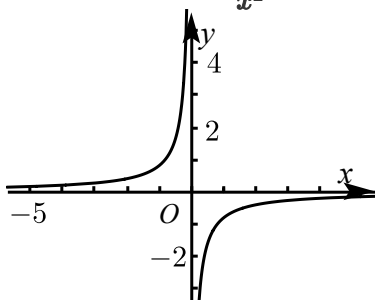
当 $x \rightarrow 0$ 时， $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ ，则 $f(x) \rightarrow 1 + 0 = 1$ ，排除 A，

故选：D。

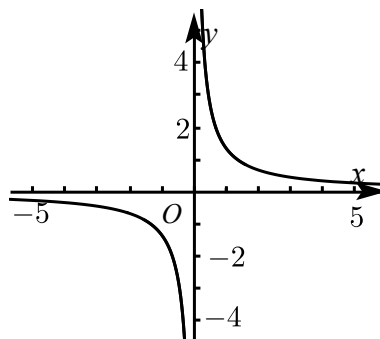
【标注】【知识点】利用极限判断函数图象

14. 函数 $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{x^2}$ 的图象大致为 ()。

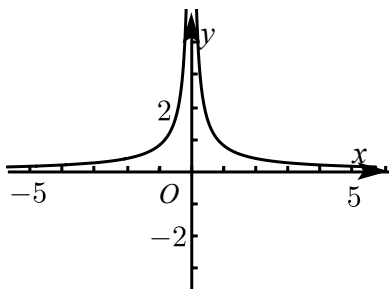
A.



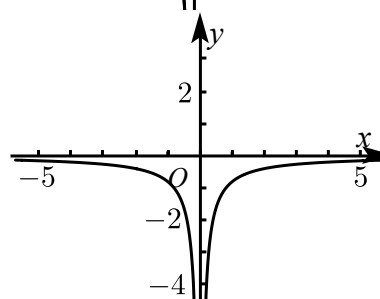
B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】

$$f(x) \text{ 的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ 关于原点对称, 且 } f(-x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2},$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{x^2} + \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2},$$

$$= \frac{\ln(x^2+1-x^2)}{x^2}$$

$$= 0,$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称,

排除 C, D,

又当 $x > 0$ 时,

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < 1,$$

则 $\ln(\sqrt{x^2+1}-x) < 0$, 从而 $f(x) < 0$,

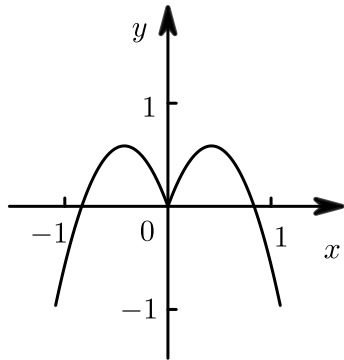
排除 B.

故选 A.

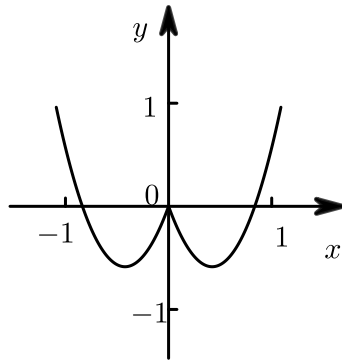
【标注】【知识点】图象法；函数图象的识别问题

15. 函数 $y = x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的图象大致为 ().

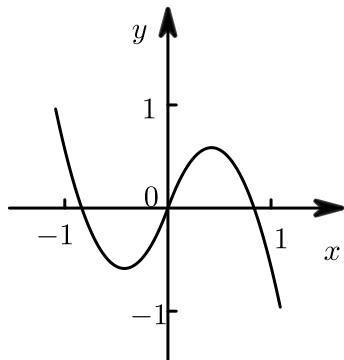
A.



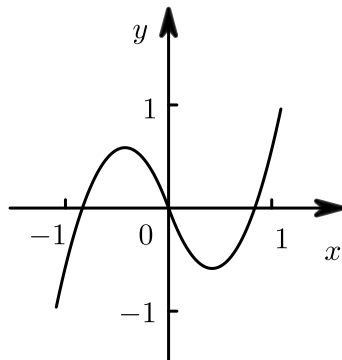
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 由 $y = f(x) = x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,

$$\begin{aligned}
 \text{且 } f(-x) + f(x) &= -x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \\
 &= \ln(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) \\
 &= \ln 1 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$\therefore y = f(x)$ 为奇函数,

故排除AB,

又 $\because$ 当 $x = -1$ 时,

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= -1 + \ln(\sqrt{2}+1) \\
 &< -1 + \ln e = 0,
 \end{aligned}$$

故排除C.

故选D.

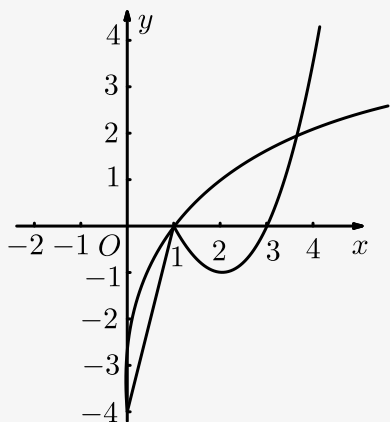
【标注】【知识点】函数图象的识别问题；图象法

三、函数零点

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x-4, & x \leq 1 \\ x^2-4x+3, & x > 1 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - \log_2 x$ 的零点个数为 ().
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 C

【解析】 $g(x) = 0$ 得 $f(x) = \log_2 x$, 在同一坐标系下分别作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象, 如图:



由图象可知两个图象共有3个交点,

则函数 $g(x) = f(x) - \log_2 x$ 的零点个数为3个.

故选C.

【标注】【素养】数学运算；直观想象

【知识点】函数零点的概念

17. 函数 $f(x) = x - 4 - (x + 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 的零点个数为 () .

A. 0

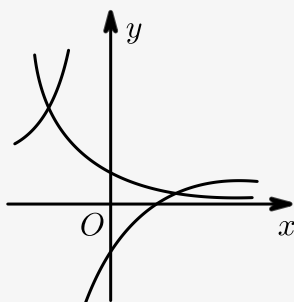
B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】令 $f(x) = 0$ ，得 $x - 4 = (x + 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ，显然 $x = -2$ 不是该方程的根，故 $\frac{x-4}{x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ，在同一直角坐标系中分别作出 $y = \frac{x-4}{x+2}$ ， $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 的图象如下所示，观察可知，它们有2个交点，即函数 $f(x) = x - 4 - (x + 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 有2个零点，故选C.



【标注】【知识点】指数函数的图象及性质；函数零点的概念；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2(1-x)|, & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ 则方程 $f\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 1$ 的实根个数为 () .

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

【答案】C

【解析】令 $f(x) = 1$ 得 $x = 3$ 或 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -1$ ，

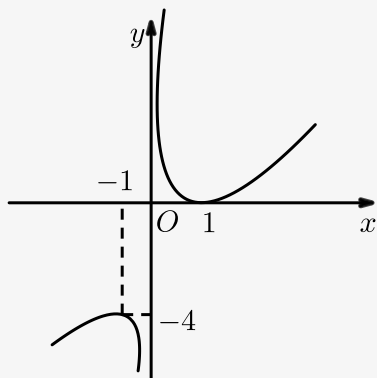
$$\therefore f\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 1,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} - 2 = 3 \text{ 或 } x + \frac{1}{x} - 2 = 1 \text{ 或 } x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x + \frac{1}{x} - 2 = -1.$$

$$\text{令 } g(x) = x + \frac{1}{x} - 2, \text{ 则当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) \geq 2 - 2 = 0,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } g(x) \leq -2 - 2 = -4,$$

作出 $g(x)$ 的函数图象如图所示：



$\therefore$ 方程 $x + \frac{1}{x} - 2 = 3$, $x + \frac{1}{x} - 2 = 1$, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{2}$ 均有两解,

方程 $x + \frac{1}{x} - 2 = -1$ 无解.

$\therefore$ 方程 $f\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 1$ 有 6 解.

故选 C.

【标注】【知识点】函数零点的概念；零点、交点、根的等价转化

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ().

A. 6

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 D

【解析】 由题意得,

$$2f(x) + 1 = 3 \text{ 或 } |\ln f(x)| = 3,$$

$$\text{即 } f(x) = 1 \text{ (舍去) 或 } f(x) = e^3 \text{ 或 } f(x) = e^{-3};$$

$$\text{若 } f(x) = e^3,$$

$$\text{则 } 2x + 1 = e^3 \text{ 或 } |\ln x| = e^3,$$

$$\text{故 } x = \frac{e^3 - 1}{2} \text{ (舍去) 或 } x = e^{e^3} \text{ 或 } x = e^{-e^3};$$

$$\text{若 } f(x) = e^{-3},$$

$$\text{则 } 2x + 1 = e^{-3} \text{ 或 } |\ln x| = e^{-3},$$

$$\text{故 } x = \frac{e^{-3} - 1}{2} \text{ 或 } x = e^{e^{-3}} \text{ 或 } x = e^{-e^{-3}};$$

故方程 $f[f(x)] = 3$ 共有 5 个解,

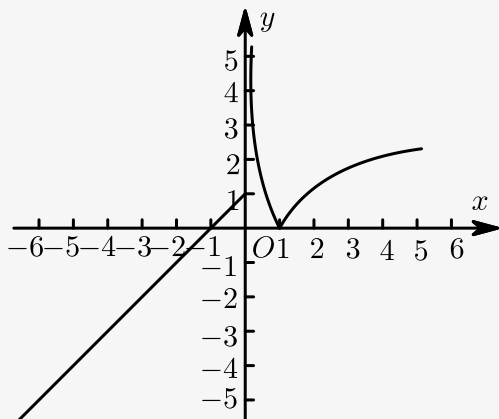
所以 D 选项是正确的.

【标注】【知识点】零点的个数问题；函数零点的概念；函数求值问题；分段函数

20. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x \leq 0) \\ |\log_2 x|, & (x > 0) \end{cases}$, 则函数 $y = f[f(x)] - 1$ 的零点个数是 _____.

【答案】 7

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x \leq 0) \\ |\log_2 x|, & (x > 0) \end{cases}$, 的图象如下图所示 :



若 $y = f[f(x)] - 1 = 0$, 则 $f[f(x)] = 1$,

则 $f(x) = 0$, 或 $f(x) = \frac{1}{2}$ 或 $f(x) = 2$,

满足 $f(x) = 0$ 的 x 有两个 , $f(x) = \frac{1}{2}$ 或 $f(x) = 2$,

满足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的 x 有三个 ,

满足 $f(x) = 2$ 的 x 有两个 ,

故函数 $y = f[f(x)] - 1$ 的零点个数是 7 个 .

故答案为 : 7 .

【标注】 【知识点】 分段函数 ; 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合)