

第三讲-函数零点综合（一）练习题

一、转化为方程求根

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{4}, & x \geq 2 \\ \log_2 x, & 0 < x < 2 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - k$ 有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围是 _____。
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2|x| - a, & x \leq 1 \\ -(x-a)^2 + a, & x > 1 \end{cases}$ ，当 $a = 1$ 时，不等式 $f(x) > x$ 的解集是 _____；若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 恰有三个实根，则实数 a 的取值范围为 _____。
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & (x \geq a) \\ -x^2 - x + 2, & (x < a) \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围是 ()。
A. $[-2, 1) \cup (2, +\infty)$
B. $[-1, 2) \cup [2, +\infty)$
C. $(-2, 1] \cup (2, +\infty)$
D. $(-2, 1] \cup [2, +\infty)$
4. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & x < \lambda \\ e^x - 1, & x > \lambda \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 λ 的取值范围是 _____。
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - x^2, & x > 0 \\ e^{|x+2|} - a, & x \leq 0 \end{cases}$ 有 4 个零点，则实数 a 的取值范围是 _____。
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{7}{6}x - 1, & x > a \\ x^2 + 3x + 4, & x \leq a \end{cases}$ ， $g(x) = f(x) - ax$ ，若函数 $g(x)$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是 ()。
A. $\left(-3, -\frac{4}{3}\right]$
B. $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$
C. $(-\infty, -1)$
D. $(7, +\infty)$
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 2^{|x|}, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = |2f(x) - a| - 1$ 存在 5 个零点，则实数 a 的取值范围为 _____。

二、参变分离

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ -x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - t$ (t 为常数) 有三个零点, 则实数 t 的取值范围为 () .
- A. $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$
 B. $\left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$
 C. $\{1\} \cup \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$
 D. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (1, +\infty)$
9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e \ln x, & 0 < x \leq m \\ \frac{e^2}{x}, & x > m \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 仅有 1 个零点, 则实数 m 的取值范围为 _____ .
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - 2t$ 有两个不同的零点, 则 t 的取值范围 () .
- A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
 B. $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 C. $(-1, +\infty)$
 D. $[-1, +\infty)$
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x - 3|, & x < 2 \\ -x^2 - 2x + 13, & x \geq 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 恰有五个不相等的实数解, 则 m 的取值范围是 () .
- A. $[0, 4]$
 B. $(0, 4)$
 C. $(4, 5)$
 D. $(0, 5)$
12. 对于实数 a, b , 定义运算 " $*$ ": $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$, 设 $f(x) = (x - 4) * (-x - 4)$, 若关于 x 的方程 $|f(x) - m| = 1$ ($m \in \mathbf{R}$) 恰有四个互不相等的实根, 则实数 m 的取值范围时 _____ .
13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \\ \frac{e^x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) - ax = 0$ 有 4 个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 () .
- A. $\left(\frac{e^2}{4}, 4\right)$
 B. $\left(\frac{e}{4}, 4\right)$
 C. $\left(\frac{e}{4}, +\infty\right)$
 D. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

三、转化为 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 交点

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, x \geq 2 \\ (x-1)^3, 0 < x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx$ 有且仅有1个实根, 则实数 k 的取值范围是 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, -2 < x \leq 1 \\ \left|x + \frac{1}{x} - 3\right|, 1 < x \leq 5 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) - \frac{1}{2}kx = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{22}{25}\right] \cup (-6, -4\sqrt{2})$

B. $\left(0, \frac{11}{25}\right] \cup (-3, -2\sqrt{2})$

C. $(0, 1] \cup (-3, -2\sqrt{2})$

D. $(0, 2] \cup (-6, -4\sqrt{2})$

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5, x \leq 1 \\ \ln x, x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$

B. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 2| + 1, x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = kx + 2k$ 有四个不同的解, 则实数 k 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

B. $(2\sqrt{2} - 2, 1)$

C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

D. $\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2} - 2\right)$

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x+1) & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) - |x - m|$ 在定义域内恰有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 ().

A. $\left(-\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right)$

B. $\left(1, \frac{13}{4}\right)$

C. $\left(-1, \frac{13}{4}\right)$

D. $\left(-\frac{5}{4}, -1\right) \cup \left(1, \frac{13}{4}\right)$

19. 若函数 $f(x) = |x| + \sqrt{a - x^2} - \sqrt{2} (a > 0)$ 没有零点, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(0, 1)$

B. $(0, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(0, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

D. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

20. 已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{3}{x} + a (a \in \mathbf{R})$, 若方程 $f(x) = 2$ 有且只有三个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 () .

A. $(1 + \sqrt{3}, 3)$

B. $(-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$

C. $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$

D. $(-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$