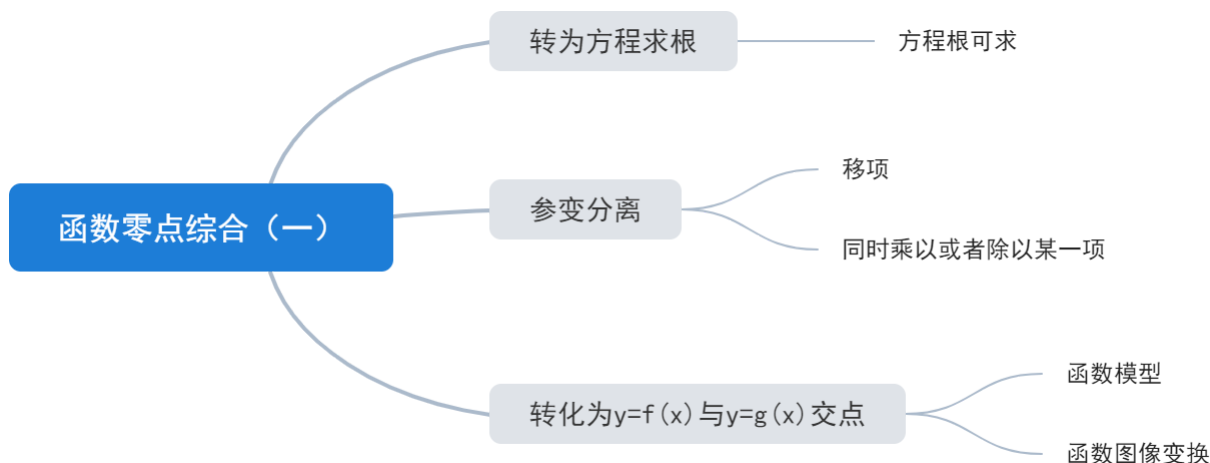


第三讲-函数零点综合（一）

1. 考点梳理



一、转化为方程求根

1. 真题分析

1. 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是 _____ .

2. 思路总结

转化为方程求根的解题步骤：

- 1、求解函数在每一段上的零点（函数上不含有参数）或者讨论函数在每一段上的零点情况（函数上含有参数）；
- 2、结合定义域进一步讨论零点个数的情况；
- 3、结合题干给出的零点个数确定参数的范围。

3. 模拟演练

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x - a)(x - 2a), & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是 _____ .
- 3.

已知 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda \\ x^2-4x+3, & x < \lambda \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 恰有2个零点，则 λ 的取值范围是_____。

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > a \\ x^2+5x+2, & x \leq a \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - 2x$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是()。

- A. $[-1, 1)$ B. $[-1, 2)$ C. $[-2, 2)$ D. $[0, 2]$

二、参变分离

1. 真题分析

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$)恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为()。

- A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$
 B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$
 C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$
 D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

6. 对实数 a 和 b ，定义运算“ $\otimes$ ”： $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1 \\ b, & a-b > 1 \end{cases}$ 。设函数 $f(x) = (x^2-2) \otimes (x-x^2)$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。

若函数 $y = f(x) - c$ 的图像与 x 轴恰有两个公共点，则实数 c 的取值范围是()。

- A. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
 B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$
 C. $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 D. $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = b - f(2-x)$ ，其中 $b \in \mathbf{R}$ ，若函数

$y = f(x) - g(x)$ 恰有4个零点，则 b 的取值范围是()。

- A. $\left(\frac{7}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$
 C. $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ D. $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$

8. 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。若方程 $f(x) - a|x-1| = 0$ 恰有4个互异的实数根，则实数 a 的取值范围为_____。

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有4个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____ .

2. 思路总结

参变分离问题解题步骤:

- 1、通过移项或者同除某一项的方式实现参数和变量的分离, 将问题转化为 $c = g(x)$ 的形式;
- 2、画出 $y = g(x)$ 的图像, 沿着一个方向平移 $y = c$, 观察在平移过程中的交点个数和对应的参数范围;
- 3、根据题目所给零点个数确定参数范围;

3. 模拟演练

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |3^x - 1|, & x \leq 1 \\ \lg(x - 1), & x > 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - 2k$ 有三个不同的零点, 则实数 k 的取值范围是 ().
- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{1}{2}]$
C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
11. 对任意实数 a, b 定义运算 " $\odot$ ": $a \odot b = \begin{cases} b, & a - b \geq 1 \\ a, & a - b < 1 \end{cases}$, 设 $f(x) = (x^2 - 1) \odot (4 + x) + k$, 若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴恰有三个交点, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $(-2, 1)$ B. $[0, 1]$ C. $[-2, 0)$ D. $[-2, 1)$
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg(x - 1)|, & x > 1 \\ \frac{1}{4^{x-1}} - \frac{1}{2}, & x \leq 1 \end{cases}$, 若函数 $y = |3f(x) - m| - 4$ 有5个零点, 则实数 m 的取值范围为 ().
- A. $(4, \frac{11}{2})$ B. $[-\frac{5}{2}, +\infty)$
C. $[-\frac{5}{2}, \frac{11}{2})$ D. $[-\frac{5}{2}, 4)$
13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x(e^x - e^{-x}), & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 4, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 ().
- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ (其中 e 为自然对数的底数), 若函数 $y = f(x) - ax^2$ 恰有三个零点, 则 ().
- A. $0 < a < \frac{e^2}{4}$ B. $0 < a < \frac{e^2}{2}$
C. $a > \frac{e^2}{4}$ D. $a > \frac{e^2}{2}$

三、转化为 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 求交点

1. 真题分析

15. 已知函数 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图象与函数 $y = kx - 2$ 的图象恰有两个交点，则实数 k 的取值范围是_____.
16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x| (k \in \mathbf{R})$ 恰有4个零点，则 k 的取值范围是().
- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0 \end{cases} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是().
- A. $(0, \frac{2}{3}]$
B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$
C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$
D. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

2. 思路总结

解题步骤：

- 1、根据题意合理地将其拆解成两个函数，要求就是拆解完的两个函数图像可以画出来；
- 2、画出两个函数的图像，这个过程中需要我们熟悉基础函数模型以及函数图像变换；
- 3、判断交点个数以及相应的参数取值范围；

3. 模拟演练

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -2 \leq x \leq 1 \\ |x + \frac{1}{x} - 4|, & 1 < x \leq 5 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - ax = 0$ 有两个解，则实数 a 的取值范围是().
- A. _____

- B. $\left(0, \frac{6}{25}\right] \cup \left[-\frac{5}{2}, -2\right)$
 C. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{25}, +\infty\right) \cup \{0, -2\}$
 D. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{25}, +\infty\right)$

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+1) + 1, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{x^2 + x + 2}{x}, & x > 0. \end{cases}$ 若方程 $f(x) = kx + 1$ 有两个实根, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ B. $\left(1, \frac{2}{\ln 2}\right]$
 C. $(1, 2]$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\ln 2}\right)$

20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) - kx + 1$ 有四个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

21. 已知函数 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = h(1-x) - mx + m - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $[0, 2 - \sqrt{2}) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
 B. $[0, 2 + \sqrt{2}) \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$
 C. $(-2 - \sqrt{2}, 0] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$
 D. $(-2 + \sqrt{2}, 0] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

22. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有 3 个零点, 则实数 k 的取值范围 ().

- A. $\left(0, \frac{9}{16}\right)$
 B. $\left(\frac{9}{16}, +\infty\right)$
 C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
 D. $\left(-\frac{1}{16}, 0\right) \cup \left(0, \frac{9}{16}\right)$

23. 设 e 为自然对数的底数, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ -e^x + ax - e^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 恰有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

24.

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 _____ .