

第二讲-解三角形练习题

一、SSA

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ _____ .

【答案】 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解析】 $\because \angle ABC = 45^\circ$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 3$,
由正弦定理可得, $\frac{3}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$,
则 $\sin \angle BAC = \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.
故答案为: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

2. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$, $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 则 $C =$ _____ .

【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】 $\because \sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$,
 $\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$,
 $\therefore (\cos A + \sin A) \cdot \sin C = 0$,
 $\because \sin C > 0$,
 $\therefore \sin A = -\cos A$,
 $\therefore A = \frac{3}{4}\pi$, $C \in \left(0, \frac{1}{4}\pi\right)$,
由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,
则 $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$
 $= \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$
 $= \frac{1}{2}$,
 $\therefore C = \frac{\pi}{6}$.

故答案为： $\frac{\pi}{6}$.

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

3. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . $a = 4, c = 3, \cos A = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 b 的值 .

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

【答案】 (1) 2 .

(2) $\frac{17 + 21\sqrt{5}}{64}$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

$$\text{又 } a = 4, c = 3, \cos A = -\frac{1}{4} ,$$

$$2b^2 + 3b - 14 = 0 ,$$

解得 $b = 2$.

$$(2) \text{ 由 } \cos A = -\frac{1}{4} , \\ \therefore \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4} ,$$

$$\text{由正弦定理得：} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{15}}{8} ,$$

$$\text{又 } 0 < B < \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore \cos B = \frac{7}{8} ,$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{7\sqrt{15}}{32} , \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{17}{32} ,$$

$$\therefore \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{15}}{32} + \frac{17}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{17 + 21\sqrt{5}}{64} .$$

【标注】【知识点】SSA类三角形（利用正弦定理）

二、 $A=2B$

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $B = 2A, a = 1, b = \sqrt{3}$ ，则 $c = (\quad)$.

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. 1

【答案】 C

【解析】由已知 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $B = 2A$,

根据正弦定理得 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 2A}$,

又 $\because \sin 2A = 2 \sin A \cos A$,

$$\therefore \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin A \cos A} ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

又 $\because A \in (0, \pi)$,

$$\therefore A = \frac{\pi}{6} ,$$

$$\therefore B = 2A = \frac{\pi}{3} ,$$

$$\therefore C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4 ,$$

$$\therefore c = 2 .$$

故选C .

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角

三、SAS

5. 设 $\triangle ABC$ 中 , $a = 2$, $\cos C = -\frac{1}{4}$, $3 \sin A = 2 \sin B$, 则 $c =$ _____ .

【答案】4

【解析】由题意知 , $3 \sin A = 2 \sin B$,

由正弦定理得 , $3a = 2b$,

又 $a = 2$, 则 $b = 3$, 且 $\cos C = -\frac{1}{4}$,

由余弦定理得 ,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 16 , \end{aligned}$$

所以 $c = 4$.

故答案为：4 .

【标注】【知识点】SAS类三角形（利用余弦定理）；边角互化（利用正弦定理）

6. 在 $\triangle ABC$ 中 , 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , $C = \frac{\pi}{3}$, $a = 5$. $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$.

(1) 求 b, c 的值.

(2) 求 $\cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $b = 8, c = 7$.

(2) $\frac{13}{14}$.

【解析】 (1) 由已知, $C = \frac{\pi}{3}, a = 5$,

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$,

即 $10\sqrt{3} = \frac{1}{2}b \cdot 5 \sin \frac{\pi}{3}$,

解得 $b = 8$,

由余弦定理可得:

$$c^2 = 64 + 25 - 80 \cos \frac{\pi}{3} = 49,$$

所以 $c = 7$.

(2) 由 (1) 有 $\cos B = \frac{49 + 25 - 64}{70} = \frac{1}{7}$,

由于 B 是三角形的内角,

易知 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 $\cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \cos B \cos \frac{\pi}{3} + \sin B \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{14}.$$

【标注】【知识点】两角和与差的余弦; 和差角公式化简求值综合运用; 余弦定理; 正余弦定理综合求解边角; 三角形面积公式

7. 钝角 $\triangle ABC$ 中 A 为钝角, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = \sqrt{6}, c = \sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求 $\cos A$ 和边 a .

(2) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}$.

(2) $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$.

【解析】 (1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{2}$,

$$\text{即} \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{bc} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

又 $\because A$ 为钝角,

$$\therefore \cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\sqrt{1 - \frac{6}{9}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$= 6 + 2 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 12,$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2B - \cos 2B)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin B \cos B - \cos^2 B + \sin^2 B)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{6}{9} + \frac{3}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；三角形面积公式；正弦定理

四、SSS

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = 4$, $AC = BC = 3$, 则 $\sin C$ 的值为().

A. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{1}{9}$
D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

【答案】 D

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because AB = 4, AC = BC = 3,$$

$$\therefore \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

故选D.

【标注】【知识点】已知正弦余弦正切或其关系求值；SSS类三角形（利用余弦定理）

【素养】数学运算

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 所对边的长分别为 a 、 b 、 c ，若 $3\sin A = 5\sin B$ ， $b + c = 2a$ ，则 $\cos C$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】由正弦定理可知： $3\sin A = 5\sin B$ ，

$$\therefore 3a = 5b,$$

$$\text{即 } a = \frac{5}{3}b,$$

$$\text{又 } \because b + c = 2a,$$

$$\therefore c = 2a - b = \frac{7}{3}b,$$

由余弦定理，可得：

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \\ &= \frac{\frac{25}{9}b^2 + b^2 - \frac{49}{9}b^2}{2 \cdot \frac{5}{3}b \cdot b} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】余弦定理；正余弦定理综合求解边角

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $a^2 - b^2 = bc$ ， $\sin C = 2\sin B$ ，则角 A 为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由 $\sin C = 2\sin B$ ，由正弦定理可知： $c = 2b$ ，代入 $a^2 - b^2 = bc$ ，

$$\text{可得 } a^2 = 3b^2,$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < A < \pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{故答案为：}\frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理

五、二次齐次型

11. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足

$$(a-b)(\sin A + \sin B) = (c-b)\sin C, a = \sqrt{3}.$$

(1) 求角 A 的值.

(2) 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $(3 + \sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$.

【解析】 (1) $a^2 - b^2 = (c-b) \cdot c$,

$$a^2 - b^2 = c^2 - bc,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) 2R = \frac{a}{\sin A} = 2,$$

$$b + c = 2\sin B + 2\sin C$$

$$= 2\sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin C$$

$$= 2\sqrt{3}\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2}{3}\pi - C < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\therefore b + c \in (3, 2\sqrt{3}],$$

$$\therefore l \in (3 + \sqrt{3}, 3\sqrt{3}].$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦函数的图象和性质；求固定区间正弦型函数值域

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c . 已知 $c^2 = a^2 + b^2 - 4bc \cos C$, 且 $A - C = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\cos C$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

【解析】 (1) $\triangle ABC$ 中, $c^2 = a^2 + b^2 - 4bc \cos C$,

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

$\therefore a = 2c$,

由正弦定理得 $\sin A = 2 \sin C$.

又 $A - C = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \sin A = \sin\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = \cos C$,

$\therefore \cos C = 2 \sin C > 0$;

又 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$,

$\therefore \frac{1}{4} \cos^2 C + \cos^2 C = 1$,

解得 $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) 由 $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 得 $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$,

$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$.

$\therefore \cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[\pi - (A + C) + \frac{\pi}{3}\right]$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2C\right)$

$= \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2C + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2C$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边为 a, b, c 且 $b^2 = a^2 - 2bc$, $A = \frac{2\pi}{3}$, 则角 C 为().

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$
D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】 A

【解析】 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + bc$,

$\therefore a^2 = b^2 + 2bc$, $\therefore b^2 = c^2 + bc = b^2 + 2bc$,

$$\therefore b = c, B = C = \frac{\pi}{6}.$$

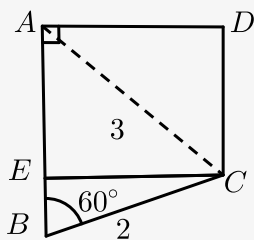
【标注】【知识点】余弦定理

六、几何问题

14. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB \perp AD$, $BC = 2$, $AC = 3$, $AD = \sqrt{3}$, 则 $CD =$ _____ .

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】 根据题意画图, $BC = 2$, $AC = 3$, $AD = \sqrt{3}$,



作 $CE \perp AB$ 于 E , 易知 $CE = BC \cos 30^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore CE \parallel AD$ 且 $CE = AD$,

$\therefore AECD$ 为矩形,

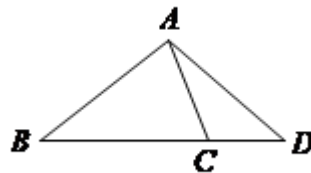
则 $CD \perp AD$,

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{6},$$

故答案为: $\sqrt{6}$.

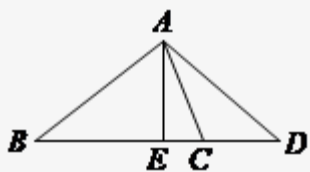
【标注】【知识点】AAS类三角形 (利用正弦定理)

15. 如图在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $CD = 5$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, 则 $AD =$ _____ .



【答案】 7

【解析】 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E ,

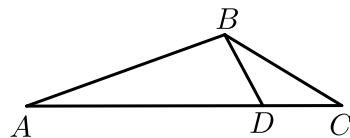


$$\begin{aligned} \because AB &= \frac{3\sqrt{6}}{2}, CD = 5, \angle ABC = 45^\circ, \angle ACB = 60^\circ, \\ \text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } AE &= AB \sin B = \frac{3\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \text{在 Rt}\triangle AEC \text{ 中, } AC &= \frac{AE}{\sin \angle ACB} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3, \\ \text{由余弦定理可得, } AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD \\ &= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49, \\ \therefore AD &= 7. \end{aligned}$$

故答案为：7.

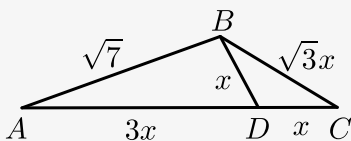
【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AD = 3DC$ ， $AB = \sqrt{7}$ ， $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ，则
 $DC = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\tan \angle ABC = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $1; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

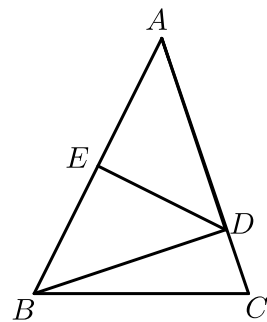


$$\begin{aligned} \because \angle ADB &= \frac{\pi}{3}, \\ \therefore \angle DBC + \angle C &= \frac{\pi}{3}, \\ \text{又} \because \angle C &= \frac{\pi}{6}, \\ \therefore \angle DBC &= \frac{\pi}{6} = \angle C, \\ \text{设 } DC &= x, \\ \therefore BD &= x, \\ \text{又} \because \angle BDC &= 120^\circ, \\ \therefore BC &= \sqrt{3}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AD &= 3DC = 3x, \\
\therefore AB^2 &= BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C, \\
7 &= 3x^2 + 16x^2 - 8\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\therefore 7 &= 19x^2 - 12x^2, \\
\therefore x &= 1, \\
\therefore DC &= 1; \\
\therefore AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC, \\
16 &= 7 + 3 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cos \angle ABC, \\
\therefore \cos \angle ABC &= -\frac{3}{\sqrt{21}}, \\
\text{又} \because \angle ABC &\in (0, \pi), \\
\therefore \sin \angle ABC &> 0, \\
\therefore \sin \angle ABC &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}, \\
\therefore \tan \angle ABC &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理综合求解边角；同角三角函数的基本关系式

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $C = \frac{\pi}{3}$ ， $BC = 4$ ，点 D 在边 AC 上， $AD = DB$ ， $DE \perp AB$ ， E 为垂足，若 $DE = 2\sqrt{2}$ ，则 $\cos A = (\quad)$ 。



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】 D

【解析】 $\because DE = 2\sqrt{2}$ ，
 $\therefore BD = AD = \frac{DE}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A}$ ，
 $\because \angle BDC = 2\angle A$ ，
 $\therefore \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \frac{4}{\sin 2A} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sin A} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A}, \\ \therefore \frac{4}{2 \sin A \cos A} &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A}, \\ \therefore \sin A &\neq 0, \\ \therefore \cos A &= \frac{\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

故选D.

【标注】【知识点】二倍角的正弦；正余弦定理综合求解边角；正弦定理

七、综合创新

18. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $a = 8, b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 $\sin B$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $\sin B = \frac{3\sqrt{15}}{16}$.
 (2) $-\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{16}$.

【解析】 (1) $\because \cos A = -\frac{1}{4}$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\therefore$ 由 $\begin{cases} 64 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b - c = 2 \end{cases}$, 得: $\begin{cases} b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$,
 $\therefore$ 由 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ 得 $\sin B = \frac{3\sqrt{15}}{16}$.
 (2) $\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{8}$, $\sin 2A = 2\sin A \cos A = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,
 $\therefore \cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{15}}{16}$.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角

19. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，且 $3\cos A \cos C(\tan A \tan C - 1) = 1$.

若 $a + c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $\frac{15\sqrt{2}}{32}$.

【解析】 (1) 由余弦定理 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$= \frac{(a+c)^2 - 2ac - b^2}{2ac} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because a+c = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore ac = \frac{45}{32},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{45}{32} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{15\sqrt{2}}{32}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；余弦定理；三角形面积公式；半角公式；二倍角的正弦；两角和与差的正弦

20. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ， $b \sin 2A + \sqrt{2}a \sin B = 0$ ， $b = \sqrt{2}c$ ，则 $\frac{c}{a}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】 由正弦定理得：

$$\sin B \cdot 2 \sin A \cos A + \sqrt{2} \sin A \sin B = 0,$$

$$\therefore \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由余弦定理得：

$$a^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 - 2 \cdot \sqrt{2}c \cdot c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\text{即 } a^2 = 5c^2,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；正余弦定理综合求解边角；余弦定理

21. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $\cos A = \frac{2}{3}$ ， $\sin B = \sqrt{5} \cos C$ 。若 $a = \sqrt{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】 $\because \cos A = \frac{2}{3}$ ， A 为三角形内角，

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{5} \cos C,$$

$$\text{且 } \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sqrt{5} \cos C,$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{5}}{3} \cos C + \frac{2}{3} \sin C = \sqrt{5} \cos C ,$$

$$\text{即 } \frac{2}{3} \sin C - \frac{2\sqrt{5}}{3} \cos C = 0 ,$$

$$\text{由 } \begin{cases} \sin C - \sqrt{5} \cos C = 0 \\ \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \end{cases} \text{ 得 } \sin C = \sqrt{\frac{5}{6}} , \cos C = \sqrt{\frac{1}{6}} .$$

又 $\because a = 2$, 由正弦定理得 :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} .$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{5}{6}}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \sqrt{3} ,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；正弦定理；三角形面积公式

22. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 7$, 角 $A = 60^\circ$, 且

$$\sin B + \sin C = \frac{13\sqrt{3}}{14} .$$

(1) 求 bc 的值 .

(2) 若 $b < c$, 求 $\cos(2B + A)$ 的值 .

【答案】 (1) 40 .

$$(2) -\frac{71}{98} .$$

【解析】 (1) $\because A = \frac{\pi}{3}$, 又 $a = 7$,

由正弦定理 :

$$\text{又 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{14}{\sqrt{3}} ,$$

$$\text{则 } \sin B = \frac{\sqrt{3}b}{14} , \sin C = \frac{\sqrt{3}c}{14} ,$$

$$\text{又 } \sin B + \sin C = \frac{13}{14} \sqrt{3} ,$$

$$\therefore b + c = 13 ,$$

由余弦定理知 :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 + b^2 - bc = (b + c)^2 - 3bc ,$$

$$\therefore 3bc = (b + c)^2 - a^2 = 13^2 - 7^2 = 120 ,$$

$$\therefore bc = 40 .$$

(2) $\because b + c = 13$, $bc = 40$, $b < c$,

$$\therefore b = 5 , c = 8 ,$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11}{14} , \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14} ,$$

$$\cos 2B = \frac{46}{196}, \sin 2B = \frac{110\sqrt{3}}{196},$$

$$\therefore \cos(2B + A) = \cos 2B \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2B \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{71}{98}.$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的余弦

23. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 8$, 点 D 在 BC 边上, 且 $CD = 2$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$.
- (1) 设 $\angle BAD = \theta$, 求 $\cos 2\theta$.
- (2) 求 BD , AC 的长.

【答案】(1) $\frac{71}{98}$.

(2) $BD = 3$, $AC = 7$.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because \cos \angle ADC = \frac{1}{7},$$

$$\therefore \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

则 $\sin \angle BAD = \sin(\angle ADC - \angle B)$

$$= \sin \angle ADC \cdot \cos B - \cos \angle ADC \cdot \sin B$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{即} \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - \frac{54}{196} = \frac{71}{98}.$$

(2) 在 $\triangle ABD$ 中,

由正弦定理得:

$$BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}$$

$$= \frac{8 \times \frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

$$= 3,$$

在 $\triangle ABC$ 中,

由余弦定理得:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$

$$= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= 49 ,$$

$$\therefore AC = 7 .$$

【标注】【知识点】余弦定理；正弦定理；正余弦定理综合求解边角；半角公式；二倍角的余弦