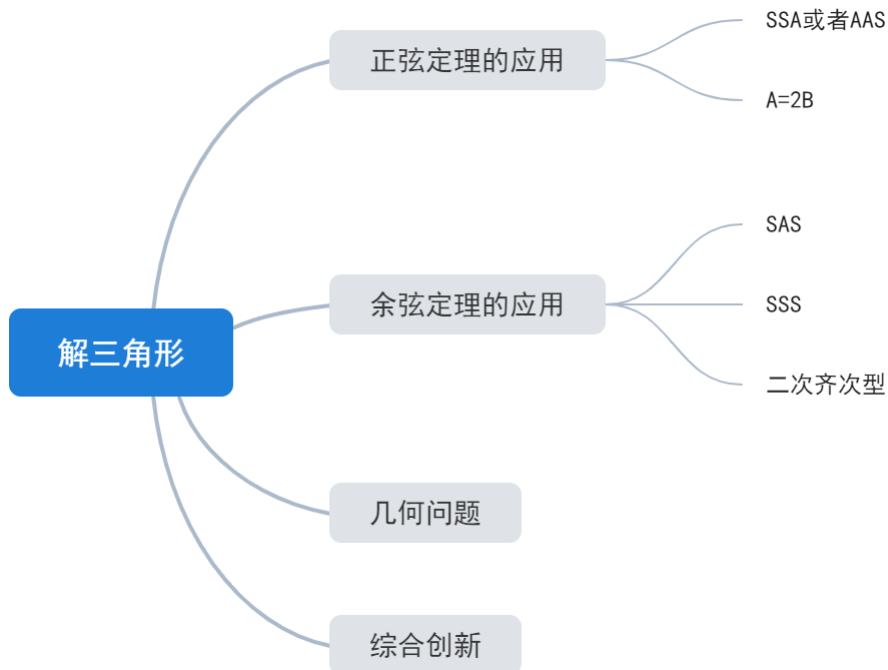


第二讲-解三角形

1. 知识梳理



一、 正弦定理应用

1. 真题分析

💡 SSA模型

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = \sqrt{13}$, $BC = 3$, $\angle C = 120^\circ$, 则 $AC = (\quad)$.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的分别是 a, b, c . 已知 $a = 2, c = \sqrt{2}, \cos A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
(1) 求 $\sin C$ 和 b 的值;
(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

💡 A=2B模型

- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $8b = 5c, C = 2B$, 则 $\cos C = (\quad)$.
A. B.

$$\text{C. } \pm \frac{\frac{7}{25}}{\frac{7}{25}}$$

$$\text{D. } \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}$$

2. 思路总结

正弦定理应用的常见模型：

1、SSA模型；常见的情况是已知三角形的两条边以及其中一条边对角的大小，这样可以通过正弦定理求解出来另外一条边的对角的正弦，此时需要注意的是根据正弦求解角度大小时会存在两个解的情况，此时我们的取舍是根据大角对大边的原则进行

2、A=2B模型；常见的情况是已知 $A = 2B$, $a = \lambda b$ ，求解 A 或者 B 的正余弦。

3. 模拟演练

SSA模型

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{7}$ ， $BC = 2$ ， $B = 60^\circ$ ，则 BC 边上的高等于（ ）。

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{4}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AC = 2$ ， $BC = 3$ ， $\cos A = -\frac{4}{5}$ 。

(1) 求 $\sin B$ 的值。

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

A=2B模型

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 3$ ， $b = 2\sqrt{6}$ ， $\angle B = 2\angle A$ ，则 $\cos A =$ _____。

7. $\triangle ABC$ 中的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，若 $\sqrt{5}b = 4c$ ， $B = 2C$ 。

求 $\cos B$ 。

二、余弦定理应用

1. 真题分析

SAS模型

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 3$ ，则 $\sin \angle BAC =$ （ ）

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b \sin A = 3c \sin B, a = 3, \cos B = \frac{2}{3}$.

(1) 求 b 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a > b, a = 5, c = 6, \sin B = \frac{3}{5}$.

(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

11. $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C , 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}, b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$,

(1) 求 a 和 $\sin C$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

SSS模型

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$.

(1) 求角 C 的大小.

(2) 求 $\sin A$ 的值.

(3) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 值.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b - c = \frac{1}{4}a, 2 \sin B = 3 \sin C$, 则 $\cos A$ 的值为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b, \sin B = \sqrt{6} \sin C$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b + c = 2a, 3c \sin B = 4a \sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

齐次型

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin A = 4b \sin B, ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值.

(2) 求 $\sin(2B - A)$ 的值 .

2. 思路总结

题型总结 :

- 1、SAS模型 ; 在已知两边及其夹角的情况下可以求出夹角的对边
- 2、SSS模型 ; 在已知三边大小或者三边比例关系的情况下可以使用余弦定理求解出来任意角的余弦值
- 3、二次齐次型 ; 题目给出三边的二次齐次式的情况下 , 可以考虑余弦定理的整体运用

3. 模拟演练

SAS模型

17. 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = 3$, $\cos A = \frac{2}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 则 BC 边长为 _____ .
18. 在 $\triangle ABC$ 中 , 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $b - c = 1$, $\cos A = \frac{1}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.
 - (1) 求 a 及 $\sin C$ 的值 .
 - (2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

SSS模型

19. $\triangle ABC$ 中 , $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 () .
 - A. $3\sqrt{3}$
 - B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 - C. 3
 - D. $\frac{3}{2}$
20. 在 $\triangle ABC$ 中 , 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 角大小为 _____ .
21. 在 $\triangle ABC$ 中 , 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{5}$, $b = 3$, $\sin C = 2\sin A$.
 - (1) 求 c .
 - (2) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .
22. 在 $\triangle ABC$ 中 , 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = C$, $2b = \sqrt{3}a$.
 - (1) 求 $\cos A$ 的值 .
 - (2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值 .
23. 在 $\triangle ABC$ 中 , 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $b = 3$, $a + c = 3\sqrt{5}$, $\sin C = 2\sin A$.
 - (1) 求 a, c 的值 .

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

齐次型

24. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 若 $5a = 3b$,

① 求 $\sin A$ 的值.

② 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为三个内角 A, B, C 的对边, 且 $b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A + c^2 = a^2$.

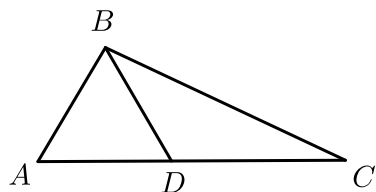
(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $b = 2, c = 3$, 求 a 和 $\sin(2B - A)$ 的值.

三、几何问题

1. 真题分析

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB = AD$, $2AB = \sqrt{3}BD$, $BC = 2DB$, 则 $\sin C$ 的值为 ().



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

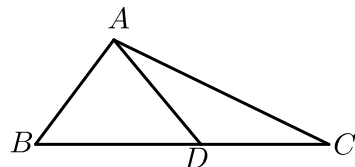
2. 思路总结

题型总结:

一般是给出一个包含多个三角形的复杂几何图形以及相应的边角关系, 首先我们需要明确的是在每个三角形中已知条件能否构成类似 SSA, SAS, SSS, AAS 之类的模型, 如果找到了可以作为突破口求解该三角形, 得到更多条件, 然后结合求出对边角判断在剩下三角形中是否有新的模型可以求解, 直至求解出来所求边或者角的大小.

3. 模拟演练

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, $AB = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$, $\cos \angle BAD = \frac{1}{3}$, 则 $\sin C =$ _____ .



28. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BC = 3BD$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle ADB = 135^\circ$. 若 $AC = \sqrt{2}AB$, 则 $BD =$ _____ .

四、 综合创新

29. $\triangle ABC$ 中的角 A, B, C 的所对的边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 $a =$ _____ .

30. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $\sin C = 2 \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

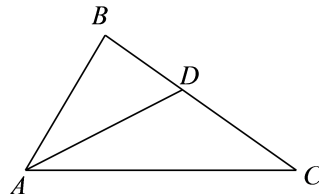
B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$
D. $\sqrt{15}$

31. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边, 且 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a + c}$.

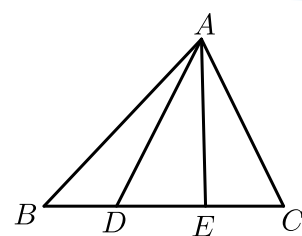
(1) 求角 B .

(2) 若 $b = \sqrt{13}$, $a + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

32. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , $AD = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{6}$ 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .



33. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $(a - b)(\sin A + \sin B) = c(\sin A - \sin C)$, $c = 4$.



若 D 、 E 在线段 BC 上，且 $BD = DE = EC$ ， $AE = 2\sqrt{3}BD$ ，求 AD 的长．