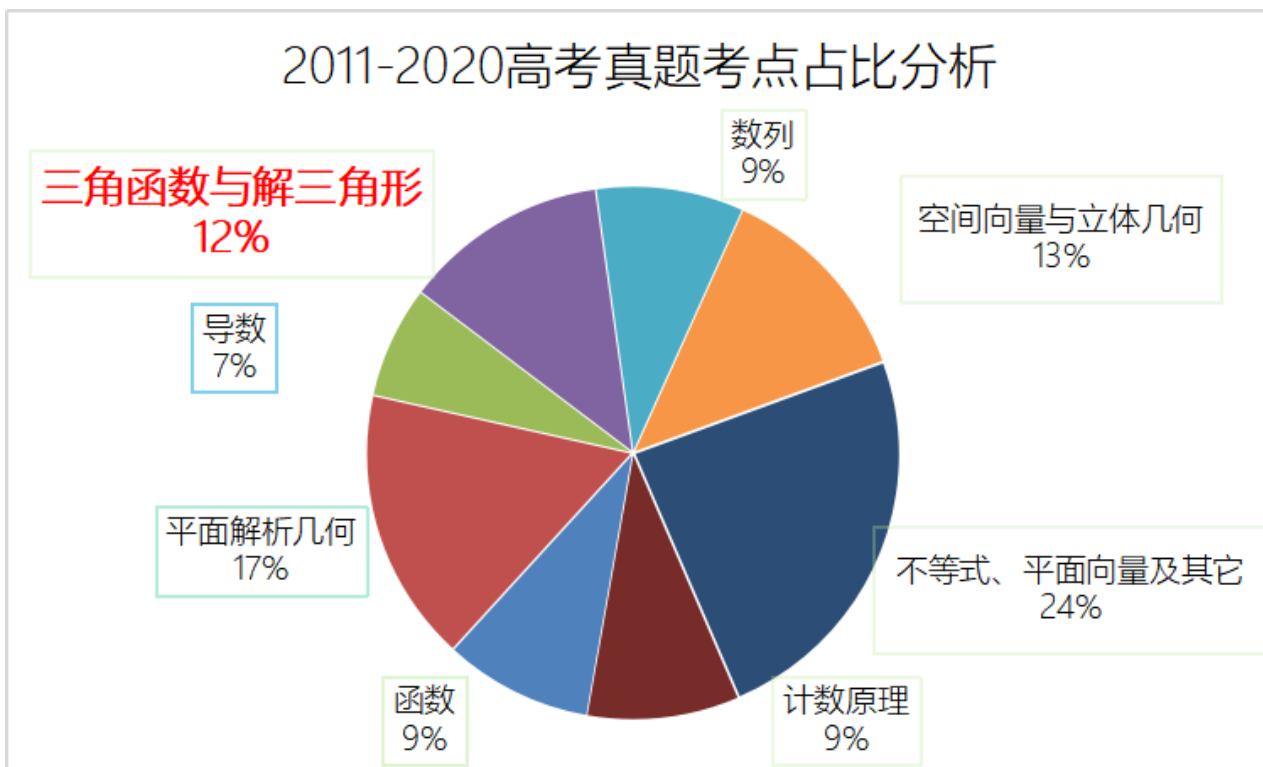


第一讲-三角恒等变换

1. 考情分析

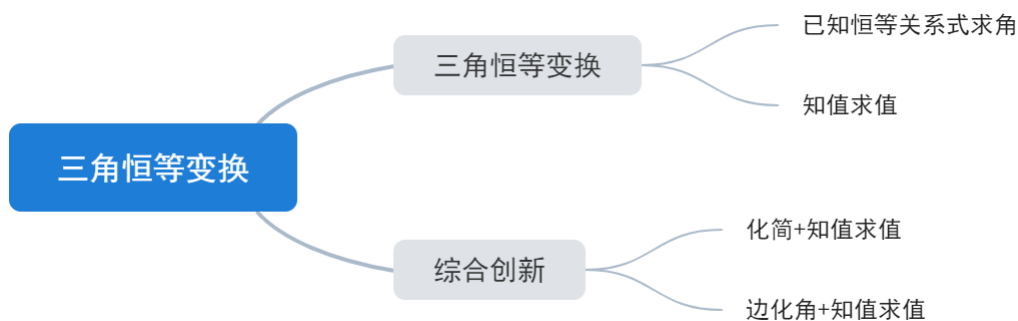
📍 考点占比



📍 考点分析

2011-2020高考真题考点分析			
考点	三角恒等变换	三角函数图像与性质	解三角形
2011	15 (理科)、16 (文科)	15 (理科)、7 (文科)	6 (理科)、16 (文科)
2012	16 (文科)	15 (理科)、7 (文科)	6 (理科)、16 (文科)
2013	16 (文科)	15 (理科)、6 (文科)	6 (理科)、16 (文科)
2014	16 (文科)	15 (理科)、8 (文科)	12 (理科)、16 (文科)
2015	16 (文科)	15 (理科)、14 (文科)	13 (理科)、16 (文科)
2016	16 (文科)	15 (理科)、8 (文科)	3 (理科)、16 (文科)
2017	15 (理科)、15 (文科)	7 (理科)、6 (文科)	15 (理科)、15 (文科)
2018	15 (理科)、16 (文科)	6 (理科)、6 (文科)	15 (理科)、16 (文科)
2019	15 (理科)、16 (文科)	7 (理科)、7 (文科)	15 (理科)、16 (文科)
2020	16	8	16
频次	14	19	19

2. 知识梳理



一、三角恒等变换

1. 真题分析

1. 已知函数 $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$,
设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, 若 $f(\frac{\alpha}{2}) = 2 \cos 2\alpha$, 求 α 的大小.

【答案】 (1) $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

【解析】 (1) 由题意知, $f(\frac{\alpha}{2}) = \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos 2\alpha$,
进行变换 $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})} = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$,
整理得 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)$,
因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$,
所以 $\sin \alpha + \cos \alpha \neq 0$,
方程左右两边消去 $\sin \alpha + \cos \alpha$,
又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
所以 $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}$,
展开得 $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$,
即 $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$,
因为 $2\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,
所以 $2\alpha = \frac{\pi}{6}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

【标注】【知识点】正切型三角函数的图象与性质

备注：2011年高考真题天津卷理科第15题

分析：本题的题型是给出恒等关系式求解角度，我们的答题思路就是要将所给关系式最终化简成

$\sin(\omega x + \varphi) = c$ 或者 $\cos(\omega x + \varphi) = c$ 或者 $\tan(\omega x + \varphi) = c$ 的形式，这样才能求解出来角度大小，我们在化简转化过程中应该注意的原则是“先拆后合、角度一致、方向一致（要么都往切化弦转化，要么都往弦化切转化）”，过程中时刻注意寻找公因式进行因式分解，结合本题我们来梳理一下具体过程，本题所给的恒等关系式为 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2\alpha$ ，先拆意味着需要将 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 展开为

$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$ ，这样原式变为 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2\cos 2\alpha$ ，此时恒等关系式中既含有切类

三角函数，又含有弦类三角函数，故而需要切化弦，既含有角度 α ，又含有角度 2α ，故而需要使用二倍角公式将角度化为一致，故而有

$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2(\sin \alpha + \cos \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)$ ，观察发现式子中含有公因式 $\sin \alpha + \cos \alpha$ ，根据题目给的角度范围可以判断 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 不为零，可以同时约去，式子化简

为 $2(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1$ ，即 $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ ，结合题目给出的 α 的范围，可以得出 $\alpha - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}$ ，这样求出角度。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ 。

(1) 求 $\cos A$ 的值；

(2) $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$ 。

(2) $-\frac{8+7\sqrt{2}}{18}$ 。

【解析】 (1) 由 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ ，可得 $c = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}。$$

(2) 因为 $\cos A = \frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$ ，

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 2A = -2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9}。$$

$$\text{故 } \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9}。$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 2A \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{8+7\sqrt{2}}{18}。 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】两角和与差的余弦；诱导公式；余弦定理

备注：2011年高考真题天津卷文科第16题

分析：本题的类型是已知某个角度三角函数值求解相关角的三角函数值，我们在处理时需要清楚已知角度和所求角度的关系，本题的已知角度为 A ，所求角度为 $2A + \frac{\pi}{4}$ ，又

$\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2A - \sin 2A)$ ，这样在已知 $\cos A$ 的情况下可以利用二倍角公式求解出来 $\cos 2A$ 和 $\sin 2A$ 。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(1) 求角 B 的大小。

(2) 设 $a = 2, c = 3$ ，求 b 和 $\sin(2A - B)$ 的值。

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$ 。

(2) $b = \sqrt{7}, \sin(2A - B) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 。

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

可得 $b \sin A = a \sin B$ ，又由 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

得 $a \sin B = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

即 $\sin B = \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

可得 $\sin B = \sqrt{3} \cos B$ ，所以 $\tan B = \sqrt{3}$ 。又由 $B \in (0, \pi)$ ，

可得 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a = 2, c = 3, B = \frac{\pi}{3}$ ，

得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 7$ ，故 $b = \sqrt{7}$ 。

由 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ ，可得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 。

因为 $a < c$ ，故 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{7}}$ 。

因此 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ， $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1}{7}$ ，

所以

$\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 。

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；边角互化（利用正弦定理）

2. 思路总结

三角恒等变换题型总结：

- 1、解析式化简+三角恒等变换化简求值；此类问题的处理思路是首先使用和差角公式、降次公式以及辅助角公式对三角函数解析式进行化简，将其变为正弦型三角函数的形式，然后根据题目所给的恒等关系式进行化简，化简过程中需要注意的原则是“先拆后合、角度一致、方向一致、时刻注意公因式”等等
- 2、边角互化+知值求值；此类问题首先需要使用正弦定理进行边角互化，最终目的是求解出来某个角的三角函数值，然后以求解出来角度的三角函数值为依据求解相关角度的三角函数值，此过程关键的是从所求出发找出所求角与已知角的关系，进而确定求解路径。

3. 模拟演练

4. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c ，且 $b = 3, c = 1, A = 2B$ 。

(1) 求 a 的值。

(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【答案】 (1) $2\sqrt{3}$ 。

(2) $\frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{48}$ 。

【解析】 (1) $\because A = 2B$,

$$\therefore \sin A = \sin 2B = 2 \sin B \cdot \cos B,$$

$$\therefore a = 2b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{可解得: } a^2 = 12,$$

$$a = 2\sqrt{3},$$

故答案为： $2\sqrt{3}$ 。

(2) 由余弦定理得：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 1 - 12}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = -\frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\cos 2A = -\frac{7}{9},$$

$$\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{48},$$

$$\text{故答案为: } \frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{48}.$$

【标注】【知识点】SSS类三角形（利用余弦定理）；边角互化（利用余弦定理）

5. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c = 1$,
 $\cos B \sin C + (\sqrt{3}a - \sin B) \cos (A + B) = 0$.
 (1) 求角 C 的大小.
 (2) 若 $a = 3b$, 求 $\cos (2B - C)$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.
 (2) $\frac{13}{14}$.

【解析】 (1) 由 $\cos B \sin C + (\sqrt{3}a - \sin B) \cos (A + B) = 0$,
 可得 $\cos B \sin C - (\sqrt{3}a - \sin B) \cos C = 0$,
 即 $\sin (B + C) - \sqrt{3}a \cos C = 0$,
 $\therefore \sin A - \sqrt{3}a \cos C = 0$, $\frac{\sin A}{a} = \sqrt{3} \cos C$,
 由正弦定理及 $c = 1$ 可得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \sin C$,
 所以 $\sin C = \sqrt{3} \cos C$, 即 $\tan C = \sqrt{3}$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$.
 (2) 由余弦定理得 $1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3} = 9b^2 + b^2 - 3b^2 = 7b^2$,
 则 $b = \frac{\sqrt{7}}{7}$, 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{\sqrt{21}}{14}$,
 因为 $b < c$,
 所以 $B < C$, B 为锐角,
 故 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$,
 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{11}{14}$,
 所以 $\cos (2B - C) = \cos \frac{\pi}{3} \cos 2B + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2B = \frac{13}{14}$.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；正弦定理；两角和与差的余弦；和差角公式化简求值综合运用

二、综合创新

1. 化简+知值求值

思路梳理

1. 熟练运用和角公式展开、二倍角公式降次以及辅助角公式合并；
2. 寻找所求角与已知角的关系，可以采取换元法；

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$.

若 $f\left(x_0 - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{6}{5}$, $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

【答案】 (1) $\cos 2x_0 = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

【解析】 (1) $f\left(x_0 - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{6}{5}$,
 $2\sin\left[2\left(x_0 - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \frac{6}{5}$,
 $\sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$,
 $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $2x_0 + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$,
 $\therefore \cos\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4}{5}$,
 $\cos 2x_0 = \cos\left[\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$,
 $= \cos\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$,
 $= \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$,
 $\cos 2x_0 = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

【标注】【知识点】求正弦型函数的周期；利用余弦和差角公式凑角求值

7. 已知函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

若 $f(x_0) = \frac{2}{5}$, $x_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, 求 $\sin x_0$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

【解析】 (1) $f(x_0) = \frac{1}{2}\sin\left(x_0 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{5}$ 得 $\sin\left(x_0 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{5}$,
 $\cos\left(x_0 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$,
 $\sin x_0 = \sin\left[\left(x_0 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式；同角三角函数的基本关系式的化简和求值；正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质；辅助角公式；和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；倍角、和差角公式综合

8. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{9}$

【标注】【知识点】两角和与差的余弦；和差角公式化简求值综合运用；诱导公式

【答案】 C

【标注】【知识点】辅助角公式；两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

【答案】 (1) $\sqrt{3}$.

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{6}.$$

【解析】 (1) $\because [f(x)]^2 + \left[f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = (\sin x + a \cos x)^2 + (\cos x - a \sin x)^2$
 $= 1 + a^2,$

$$\text{又 } [f(x)]^2 + \left[f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 4.$$

$$\therefore 1 + a^2 = 4, \text{ 又 } a > 0, \text{ 故 } a = \sqrt{3}.$$

$$(2) f(\alpha) \cdot f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha)$$

$$= \sqrt{3} \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sqrt{3} \sin^2 \alpha$$

$$= \sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$$

$$= 2 \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } f(\alpha) \cdot f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \text{ 可得 } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\text{又 } \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 2\alpha + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{6}.$$

【标注】【知识点】两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

11. 已知 $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) + a$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 若 $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 $\frac{\sqrt{2} \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 + \tan \alpha}$ 的值.

【答案】 (1) $a = \frac{1}{2}$.

(2) $\frac{5}{9}$.

【解析】 (1) $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + a = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1 - \cos x}{2} + a$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} + a,$$

$$\therefore f(x)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + a = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}.$$

(2) 由(1)有, $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

$$\therefore f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha, \\
 \therefore f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\
 \therefore \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{2}{3}, \\
 \text{原式} &= \frac{\sqrt{2} \left(\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1}{1 + \tan \alpha} \\
 &= \frac{\sin 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha, \\
 \therefore \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{2}{3}, \\
 \therefore 1 - \sin 2\alpha &= \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{9}, \\
 \therefore \text{原式} &= \frac{5}{9}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；二倍角的正弦；二倍角的余弦；半角公式；正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

2. 边化角+知值求值

思路梳理

1、使用正弦定理将边转化为角；

2、合理使用

$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$; $\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$, 可以正向的将 $\sin A$ 转化为 $\sin B \cos C + \sin C \cos B$ 或者将 $\cos A$ 转化为 $\sin B \sin C - \cos B \cos C$, 也可以逆向的将 $\sin B \cos C + \sin C \cos B$ 转化为 $\sin A$ 或者 $\sin B \sin C - \cos B \cos C$ 转化为 $\cos A$.

正向拆解

12. 在三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c = a \cos B - \frac{\sqrt{3}}{3} b \sin A$. 求角 A ;

【答案】 (1) $\frac{2}{3}\pi$.

【解析】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,
 $\therefore c = a \cos B - \frac{\sqrt{3}}{3} b \sin A$,

$$\begin{aligned} \therefore \sin C &= \sin A \cos B - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin B \sin A = \sin(A+B), \\ \therefore \sin A \cos B - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A \sin B &= \sin A \cos B + \sin B \cos A, \\ \therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin A \sin B &= \sin B \cos A. \end{aligned}$$

又在 $\triangle ABC$ 中, $B \in (0, \pi)$, $\therefore \sin B \neq 0$,

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{2}{3}\pi$.

$\therefore$ 角 A 为 $\frac{2}{3}\pi$.

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；多个三角形拼接的解三角形问题；正弦定理；余弦定理；三角形面积公式

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = a \cos C + \frac{1}{2}c$.
求角 A .

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$.

【解析】 (1) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 可知:

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C,$$

代入 $b = a \cos C + \frac{1}{2}c$, 化简得

$$\sin B = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $B = \pi - A - C$,

$$\text{故} \sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C,$$

$$\text{即} \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C,$$

$$\text{即} \cos A \sin C = \frac{1}{2} \sin C,$$

因为 $\triangle ABC$ 中, $\sin C \neq 0$,

$$\text{所以} \cos A = \frac{1}{2},$$

又因为 $A \in (0, \pi)$,

$$\text{所以} A = \frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】正弦定理；余弦定理；正余弦定理综合求解边角；向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）

14. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0$.

求角 A .

【答案】 (1) $A = 60^\circ$.

【解析】 (1) $\triangle ABC$ 中 ,

$$\because a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0 ,$$

利用正弦定理可得

$$\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C = \sin(A + C) + \sin C ,$$

$$\text{化简可得} \sqrt{3} \sin A - \cos A = 1 ,$$

$$\therefore \sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore A - 30^\circ = 30^\circ ,$$

$$\therefore A = 60^\circ .$$

【标注】【知识点】SAS类三角形（利用余弦定理）；三角形面积公式

15. 在 $\triangle ABC$ 中 , 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\cos C + \cos A \cos B = 2\sqrt{2} \sin A \cos B$.
求 $\cos B$ 的值 .

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$.

【解析】 (1) $\because \cos C + \cos A \cos B = 2\sqrt{2} \sin A \cos B$,

$$\text{则} -\cos(A + B) + \cos A \cos B = -2\sqrt{2} \sin A \cos B ,$$

$$\text{得} \tan B = -2\sqrt{2} ,$$

在 $\triangle ABC$ 中 , $B \in (0, \pi)$,

$$\therefore \cos B = \frac{1}{3} .$$

【标注】【知识点】求边长相关最值或范围问题

|| 逆向合并

16. 在 $\triangle ABC$ 中 , 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = \sin A + \sin C$.
求证 : a, b, c 成等差数列 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because 2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = \sin A + \sin C$,

$$\therefore 2 \sin(A+C) = \sin A + \sin C,$$

由于在 $\triangle ABC$ 中, $A+C = \pi - B$,

$$\therefore \sin(A+C) = \sin B,$$

$$\therefore 2 \sin B = \sin A + \sin C,$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $2b = a + c$.

$\therefore a, b, c$ 成等差数列.

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；半角公式；余弦定理；正弦定理

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$.

求 C .

【答案】 (1) $C = \frac{\pi}{3}$.

【解析】 (1) 由已知及正弦定理得 $2 \cos C(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin C$,

$$2 \cos C \sin(A+B) = \sin C,$$

$$\text{故 } 2 \sin C \cos C = \sin C, \text{ 可得 } \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】正余弦定理综合求解边角；正余弦定理综合判断三角形形状；三角形面积公式；正弦定理；余弦定理

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos B - 2 \cos A}{\cos C} = \frac{2a - b}{c}$.

若角 A 是钝角, 且 $\sin A = \frac{4}{5}$, 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{4\sqrt{21} + 17\sqrt{3}}{50}$

【解析】 (1) $\sin A = \frac{4}{5}$,
 $\therefore \sin B = \frac{2}{5}$,

因为 A 是钝角, 所以 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{21}}{25}, \cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = \frac{17}{25},$$

$$\text{所以 } \sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin 2B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2B = \frac{4\sqrt{21} + 17\sqrt{3}}{50}.$$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；两角和与差的正弦；正弦定理；正余弦定理综

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\frac{2a}{\cos A} = \frac{3c - 2b}{\cos B}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(2) $\frac{4\sqrt{5} - \sqrt{3}}{18}$.

【解析】 (1) $\frac{2a}{\cos A} = \frac{3c - 2b}{\cos B}$,

由正弦定理得,

$$\frac{2 \sin A}{\cos A} = \frac{3 \sin C - 2 \sin B}{\cos B}.$$

$$\text{即 } 2 \sin A \cos B = 3 \sin C \cos A - 2 \sin B \cos A,$$

$$\text{即 } 2 \sin(A + B) = 3 \sin C \cos A,$$

$$2 \sin C = 3 \sin C \cos A.$$

A, B, C 均在 $(0, \pi)$ 内.

$$\therefore \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin 2A \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin A \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2 \cos^2 A - 1) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(2 \times \frac{4}{9} - 1\right) \\ &= \frac{4\sqrt{5} - \sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值；同角三角函数的基本关系式；两角和与差的余弦；两角和与差的正弦；和差角公式化简求值综合运用

其它

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$\cos 2C - \cos 2A = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right).$$

求角 A 的值.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

【解析】 (1) $\because \cos 2C - \cos 2A = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + C \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - C \right)$
 $= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{1}{2} \sin C \right)$
 $= \frac{3}{2} \cos^2 C - \frac{1}{2} \sin^2 C$
 $= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2C}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2C}{2}$
 $= \frac{1}{2} + \cos 2C ,$
 $\therefore -\cos 2A = \frac{1}{2} ,$ 解得 : $\cos 2A = -\frac{1}{2} .$
 $\because A \in (0, \pi) , 2A \in (0, 2\pi) ,$
 $\therefore$ 当 $2A = \frac{2\pi}{3}$ 时 , 解得 : $A = \frac{\pi}{3} ,$
当 $2A = \frac{4\pi}{3}$ 时 , 解得 : $A = \frac{2\pi}{3} .$

【标注】【知识点】和差角公式化简求值综合运用；边角互化（利用正弦定理）；求边长相关最值或范围问题