

随机变量的期望与方差

一、 随机变量的期望与方差

1. 离散型随机变量的数学期望

一般地，设一个离散型随机变量 X 所有可能的取值是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，这些值对应的概率是 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，则 $E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$ ，叫做这个离散型随机变量 X 的均值或数学期望（简称期望）。

离散型随机变量的数学期望刻画了这个离散型随机变量的平均取值水平。

【补充说明】

- (1) 由计算公式可知离散型随机变量的期望与它本身的单位相同；
- (2) 离散性随机变量的期望只是反映出了随机变量取值的中心位置，并不能完整的展现随机变量分布列的性质；
- (3) 随机变量的分布列相同，则数学期望一定相同；反之不然。
- (4) 离散型随机变量的期望具有线性性质： X 为随机变量且 a, b 为常数，记 $Y = aX + b$ ，则 $E(Y) = aE(X) + b$ 。

例1

1. 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

则 X 的数学期望 $EX = ()$ 。

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

练1

2. 马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布列如下表：

X	1	2	3
$P(\xi = x)$	?	!	?

请小牛同学计算 ξ 的数学期望，尽管“!”处完全无法看清，且两个“?”处字迹模糊，但能断定这两个“?”处的数值相同，据此，小牛给出了正确答案 $E\xi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 常用分布列模型的期望

🔔 两点分布

若随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布, 则 $E(X) = p$ (请读者自行计算) .

🔔 二项分布

若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np$.

🔔 超几何分布

若离散型随机变量 X 服从参数为 N, M, n 的超几何分布, 则 $E(X) = \frac{nM}{N}$.

【补充说明】

二项分布与超几何分布的期望公式证明难度较大, 主体是利用公式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, 感兴趣的同学可以挑战一下 .

🔔 例2

3. 从4名男生和2名女生中任选3人参加演讲比赛, 设随机变量 X 表示所选3人中女生的人数 .

(1) 求 X 的期望;

(2) 求“所选3人中女生人数 $X \leq 1$ ”的概率 .

🔔 练2

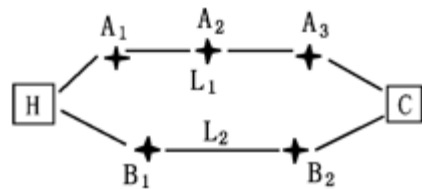
4. 十八届四中全会明确提出“以法治手段推进生态文明建设”, 为响应号召, 某市红星路小区的环保人士向该市政府部门提议“在全市范围内禁放烟花、炮竹”. 为此, 红星路小区的环保人士对该小区年龄在 $[15, 75)$ 的市民进行问卷调查, 随机抽查了50人, 并将调查情况进行整理后制成下表:

年龄 (岁)	$[15, 25)$	$[25, 35)$	$[35, 45)$	$[45, 55)$	$[55, 65)$	$[65, 75)$
频数	6	10	12	12	5	5
赞成人	3	6	10	6	4	3

(1) 请估计红星路小区年龄在 $[15, 75)$ 的市民对“禁放烟花、炮竹”的赞成率和被调查者的年龄平均值;

(2) 若从年龄在 $[55, 65)$ 、 $[65, 75)$ 的被调查者中各随机选取两人进行追踪调查, 记被选4人中不赞成“禁放烟花、炮竹”的人数为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望 .

5. 小明家住 H 小区, 他在 C 区的光华中学上学, 从家骑车到学校上学有 L_1, L_2 两条路线 (如图), L_1 路线上有 A_1, A_2, A_3 三个路口, 各路口遇到红灯的概率均为 $\frac{1}{2}$; L_2 路线上有 B_1, B_2 两个路口, 各路口遇到红灯的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$.



- (1) 若走 L_1 路线, 求最多遇到1次红灯的概率;
- (2) 若走 L_2 路线, 求遇到红灯次数 X 的数学期望;
- (3) 按照“平均遇到红灯次数最少”的要求, 请你帮助小明从上述两条路线中选择一条最好的上学路线, 并说明理由.

3. 离散型随机变量的方差

一般地, 设一个离散型随机变量 X 所有可能的取值是 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 这些值对应的概率是 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 则 $D(X) = (x_1 - E(x))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(x))^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E(x))^2 \cdot p_n$ 叫做这个离散型随机变量 X 的方差. 离散型随机变量的方差反映了离散随机变量的取值相对于期望的平均波动的大小 (离散程度). $D(X)$ 的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 叫做离散型随机变量 X 的标准差, 它也是一个衡量离散型随机变量波动大小的量.

方差的性质

对于 $a, b \in \mathbf{R}$, 定义随机变量 $\eta = a\xi + b$ (ξ 为随机变量), 则 $D(\eta) = a^2 D(\xi)$.

方差的另一种求法

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

例3

6. 随机变量 ξ 的取值为0, 1, 2, 若 $P(\xi = 0) = \frac{1}{5}$, $E(\xi) = 1$, 则 $D(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 随机变量 X 的分布列如右表, 若 $E(X) = \frac{7}{6}$, 则 $D(X) = (\quad)$.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	a	b

A. $\frac{7}{12}$

B. $\frac{17}{36}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{11}{6}$

练3

8. 已知离散型随机变量 X 的分布列如下表:

X	-1	0	1	2

P	a	b	c	$\frac{1}{12}$
-----	-----	-----	-----	----------------

若 $E(X) = 0$, $D(X) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

9. 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X = k) = \frac{1}{3}$, $k = 1, 2, 3$. 则 $D(3X + 5)$ 等于 ().

- A. 6 B. 9 C. 3 D. 4

10. 设离散型随机变量 X 的方差 $D(X) = \frac{10}{9}$, 则 $D(3X + 1)$ 的值为 ().

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 30

4. 常用分布模型的方差

两点分布

若随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布, 则 $D(X) = p(1 - p)$ (请读者自行计算).

二项分布

若 $X \sim B(n, p)$, 则 $D(X) = np(1 - p)$.

例4

11. 已知 $X \sim B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 则 $E(X)$ 、 $D(X)$ 的值依次为 ().

- A. 3, 2 B. 2, 3 C. 6, 2 D. 2, 6

12. 设服从二项分布 $B(n, p)$ 的随机变量 ξ 的期望值和方差分别是 2.4 与 1.44, 则二项分布的参数 n, p 的值为 ().

- A. $n = 4, p = 0.6$ B. $n = 6, p = 0.4$
C. $n = 8, p = 0.3$ D. $n = 24, p = 0.1$

练4

13. 设随机变量 $\xi \sim B(n, p)$, 且 $E\xi = 1.6$, $D\xi = 1.28$, 则 ().

- A. $n = 8, p = 0.2$ B. $n = 4, p = 0.4$
C. $n = 5, p = 0.32$ D. $n = 7, p = 0.45$

14. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.

(1) 求甲答对试题数 X 的分布列、数学期望与方差.

(2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

二、综合问题

例5

15. 在某校开展的“阳光体育”系列活动中，甲、乙两班之间进行了一次200米跑的团体比赛．每个班各派出5名同学比赛，讲每名同学的200米成绩记录以后（单位：秒，且已知每个成绩都是整数），总用时少的班级获胜，

成绩记录如下表所示：

队员编号	1	2	3	4	5
甲班成绩	31	34	33	29	28
乙班成绩	27	31	30	x	31

表格中的 $x \in [30, 40)$ ．

- (1) 若 $x = 36$ ，从甲班的5名同学中任取3名，记这3人中用时少于乙队平均用时的人数为随机变量 η ，求 η 的分布列；
- (2) 若最终乙班获胜，那么当乙班同学的成绩方差最大时， x 的取值是多少（直接写出结果，不用证明）？
16. 某人进行射击训练，击中目标的概率是 $\frac{4}{5}$ ，且各次射击的结果互不影响．
- (1) 假设该人射击5次，求恰有2次击中目标的概率
- (2) 假设该人每射击5发子弹为一组，一旦命中就停止，并进入下一组练习，否则一直打完5发子弹才能进入下一组练习，求：
- ① 在完成连续两组练习后，恰好共使用了4发子弹的概率；
- ② 一组练习中所使用子弹数 ξ 的分布列，并求 ξ 的期望．

练5

17. 为回馈顾客，某商场拟通过摸球兑奖的方式对1000位顾客进行奖励，规定：每位顾客从一个装有4个标有面值的球的袋中一次性随机摸出2个球，球上所标的面值之和为该顾客所获的奖励额．
- (1) 若袋中所装的4个球中有1个所标的面值为50元，其余3个均为10元．
- ① 求顾客所获的奖励额为60元的概率；
- ② 预计这1000个顾客有多少人可以获得60元？并说明理由．
- (2) 商场对奖励总额的预算是60000元，并规定袋中的4个球只能由标有面值10元和50元的两种球组成，或标有面值20元和40元的两种球组成．为了使顾客得到的奖励总额尽可能符合商场的预算且每位顾客所获的奖励额相对均衡，请对袋中的4个球的面值给出一个合适的设计，并说明理由．

18. 小明从家到学校有两条路线，路线1上有三个路口，各路口遇到红灯的概率均为 $\frac{1}{2}$ ；路线2上有两个路口，各路口遇到红灯的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ．
- (1) 若小明上学走路线1，求最多遇到1次红灯的概率；
 - (2) 若小明上学走路线2，求遇到红灯次数 X 的数学期望；
 - (3) 按照“平均遇到红灯次数越少为越好”的标准，请你帮助小明从上述两条路线中选择一条最好的上学路线，并说明理由．