

三种常见分布

一、 两点分布

如果随机变量的分布列为

X	1	0
P	p	$1-p$

其中 $0 < p < 1$ ，则称离散型随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布。

例1

1. 下列随机变量中服从两点分布的是（ ）。

- A. 射击一次命中目标的次数
- B. 抛掷三枚骰子，所得的点数之和
- C. 抛掷一枚骰子，所得的点数
- D. 6张卡片上分别标有号码1, 2, 3, 4, 5, 6，从中任取3张，三张卡片中最大的号码

【答案】 A

【解析】 一次射击命中目标的次数 X 取值只可能为0, 1, 0表示没有命中, 1表示命中, 符合两点分布。

【标注】 【知识点】 两点分布；离散型随机变量的分布列

2. 设随机变量 X 服从两点分布，若 $P(X=1) - P(X=0) = 0.2$ ，则成功概率 $P(X=1) = ()$ 。

- A. 0.2
- B. 0.4
- C. 0.6
- D. 0.8

【答案】 C

【解析】 $\because$ 随机变量 X 服从两点分布，

$$\therefore P(X=0) + P(X=1) = 1 \text{ ①},$$

$$\therefore P(X=1) - P(X=0) = 0.2 \text{ ②},$$

$$\text{由②知 } P(X=1) = P(X=0) + 0.2 \text{ ③},$$

$$\text{将③代入①得 } 2P(X=0) + 0.2 = 1, \text{ 得 } P(X=0) = 0.4,$$

$$\therefore P(X=1) = 0.4 + 0.2 = 0.6.$$

故答案为C .

【标注】【知识点】两点分布；离散型随机变量的分布列

练1

3. 已知随机变量 X 服从两点分布，且 $P(X=1)=0.6$ ，设 $\xi=3X-2$ ，那么 $P(\xi=-2)=$ _____ .

【答案】 0.4

【解析】 $\xi=-2$ ，则 $X=0$ ，

$$\therefore P(\xi=-2)=P(X=0)=1-P(X=1)=0.4 .$$

故答案为：0.4 .

【标注】【知识点】两点分布；离散型随机变量的分布列；概率的基本性质

4. 若离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$9c^2 - c$	$3 - 8c$

则常数 $c=$ _____， $P(X=1)=$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{3}$ ； $\frac{1}{3}$

【解析】 依分布列的性质知
$$\begin{cases} 9c^2 - c \geq 0 \\ 3 - 8c \geq 0 \\ 9c^2 - c + 3 - 8c = 1 \end{cases}, \text{解得 } c = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } P(X=1) = 3 - 8 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ ； $\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；两点分布；概率的基本性质

5. 袋内有10个白球，5个红球，从中摸出两球，记 $X = \begin{cases} 0, & \text{两球全红,} \\ 1, & \text{两球非全红,} \end{cases}$ ，求随机变量 X 的分布列 .

【答案】

X	0	1
P	$\frac{2}{21}$	$\frac{19}{21}$

【解析】 由题设可知，随机变量 X 服从两点分布，

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{2}{21}$	$\frac{19}{21}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列；两点分布

二、二项分布

X	0	1	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

称这样的离散型随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $XB(n, p)$.

 例2

- A. $\frac{80}{243}$
C. $\frac{80}{729}$
- B. $\frac{100}{243}$
D. $\frac{100}{729}$

【答案】 A

故3次摸球相当于3次独立重复实验，

所以3次摸球恰有1次中奖的概率 $P = C_3^1 \times \frac{5}{9} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{80}{243}$.

故选A.

【标注】 **【知识点】** n 次独立重复试验与二项分布；超几何分布

7. 同时抛掷5枚质地均匀的硬币，设正面向上的硬币数为随机变量 X 。

求 X 的分布列。

【答案】(1)

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

【解析】(1) 同时抛掷5枚质地均匀的硬币，因为互不影响，

所以可以看作5次抛一枚硬币的重复试验，

故 $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ， X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

【标注】【知识点】 n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的数学期望

练2

8. 小王在某社交网络的朋友圈中，向在线的甲乙丙随机发放红包，每次发放1个。

(1) 若小王发放5元的红包2个，求甲恰得1个的概率。

(2) 若小王发放3个红包，其中5元的2个，10元的1个。记乙所得红包的总钱数为 X （单位：元），求 X 的分布列。

【答案】(1) $\frac{4}{9}$ 。

(2) X 的分布列为：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

【解析】(1) 设“甲恰得1个红包”为事件 A ，

$$则P(A) = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}。$$

(2) X 的所有可能取值为0, 5, 10, 15, 20。

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=5) = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=10) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=15) = C_2^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27},$$

$$P(X=20) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

故 X 的分布列为：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

【标注】【知识点】 n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的分布列

9. 某高中生每天骑电动自行车上学，从家到学校的途中有4个交通岗，假设他在各交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{1}{3}$ 。

(1) 求这名学生在上学途中遇到红灯的次数 X 的分布列。

(2) 求这名学生在上学途中首次遇到红灯时已通过3个交通岗的概率。

【答案】 (1)

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(2) $\frac{2}{81}$ 。

【解析】 (1) 由已知，有 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ 。

$$\text{可得 } P(X=k) = C_4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

所以随机变量 X 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

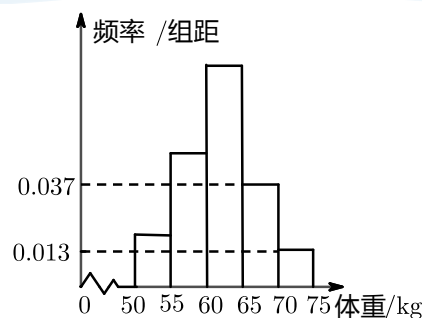
(2) 设“在上学途中首次遇到红灯时已通过3个交通岗”的事件记为 A ，

它表示这名学生在上学途中前3个交通岗不是红灯，第4个交通岗遇到红灯的情况。

$$\text{则 } P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{81}.$$

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的分布列；离散型随机变量的数学期望

10. 为了解今年某校高三毕业班报考飞行员学生的体重情况，现对该校报考飞行员学生的体重进行了统计，将所得的数据整理后，画出了如图所示的频率分布直方图，已知图中从左到右的前3个小组的频率之比为1:2:3，其中第2组的频数为12。



- (1) 求该校报考飞行员的总人数 .
- (2) 以这所学校的样本数据来估计全省的总体数据 , 若从全省报考飞行员的同学中 (人数很多) 任选三人 , 设 X 表示体重超过 60kg 的学生人数 , 求 X 的分布列 .

【答案】 (1) 48 (人) .

(2) X 的分布列为 :

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

【解析】 (1) 设该校报考飞行员的总人数为 n , 前 3 个小组的频率分别为 p_1 , p_2 , p_3 ,

则由题意可得 :

$$\begin{cases} p_2 = 2p_1 \\ p_3 = 3p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 + (0.037 + 0.013) \times 5 = 1 \end{cases},$$

解得 $p_1 = 0.125$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.375$,

又因为 $p_2 = 0.25 = \frac{12}{n}$,

故 $n = 48$.

(2) 由(1)可得 ,

一个报考学生体重超过 60kg 的概率为 :

$$p = p_3 + (0.037 + 0.013) \times 5 = \frac{5}{8} .$$

因为人数很多 , 故 X 近似服从二项分布 ,

$$P(X = k) = C_3^k \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{3-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3) .$$

随机变量 X 的分布列为 :

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

【标注】 【知识点】离散型随机变量的分布列 ; n 次独立重复试验与二项分布 ; 离散型随机变量的数学期望 ; 频率与概率问题 ; 概率的基本性质

11. 某学校举行联欢会，所有参演的节目都由甲、乙、丙三名专业老师投票决定是否获奖．甲、乙、丙三名老师都有“获奖”“待定”“淘汰”三类票各一张．每个节目投票时，甲、乙、丙三名老师必须且只能投一张票，每人投三类票中的任何一类票的概率都为 $\frac{1}{3}$ ，且三人投票相互没有影响，若投票结果中至少有两张“获奖”票，则决定该节目最终获一等奖；否则，该节目不能获一等奖．
- (1) 求某节目的投票结果是最终获一等奖的概率．
- (2) 求某节目投票结果中所含“获奖”和“待定”票票数之和 X 的分布列．

【答案】 (1) $\frac{7}{27}$.

(2) 所含“获奖”和“待定”票票数之和 X 的值为0, 1, 2, 3,

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

【解析】 (1) 设“某节目的投票结果是最终获一等奖”这一事件为 A ，则事件 A 包括：

该节目可以得到两张“获奖”票，或者得到三张“获奖”票，

因为甲、乙、丙三名老师必须且只能投一张票，

每人投三类中的任何一类票的概率都为 $\frac{1}{3}$ ，且三人投票相互没有影响，

$$\text{所以 } P(A) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27} .$$

(2) 所含“获奖”和“待定”票票数之和 X 的值为0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} ; P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} ;$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} ; P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} ,$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望； n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的分布列

12. 为了防止受到核污染的产品影响我国民众的身体健康，要求产品在进入市场前必须进行两轮核辐射检测，只有两轮都合格才能进行销售，否则不能销售．已知某产品第一轮检测不合格的概率为 $\frac{1}{6}$ ，第二轮检测不合格的概率为 $\frac{1}{10}$ ，两轮检测是否合格相互没有影响．
- (1) 求该产品不能销售的概率．
- (2) 如果产品可以销售，则每件产品可获利40元；如果产品不能销售，则每件产品亏损80元（即获利-80元）．已知一箱中有产品4件，记一箱产品获利 X 元，求 X 的分布列．

【答案】(1) $\frac{1}{4}$.

(2)

X	-320	-200	-80	40	160
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

【解析】(1) 记“该产品不能销售”为事件 A ,

则 $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{4}$, 所以, 该产品不能销售的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2) 由题意可知 X 的取值为 -320, -200, -80, 40, 160.

$$P(X = -320) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256},$$

$$P(X = -200) = C_4^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64},$$

$$P(X = -80) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128},$$

$$P(X = 40) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$P(X = 160) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}.$$

所以 X 的分布列为:

X	-320	-200	-80	40	160
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列; n 次独立重复试验与二项分布; 离散型随机变量的数学期望; 互斥事件与对立事件; 对立事件的概率和为 1; 相互独立事件的概率乘法公式

三、超几何分布

一般的, 设有总数为 N 件的两类物品, 其中一类有 M 件, 从所有物品中任取 n 件 ($n \leq N$), 这 n 件中所含这类物品件数 X 是一个离散型随机变量, 它取值为 m 时的概率为 $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ ($0 \leq m \leq l$, 其中 l 为 n 和 M 中较小的一个). 我们称离散型随机变量 X 的这种形式的概率分布为超几何分布, 也称 X 服从参数为 N 、 M 、 n 的超几何分布.

例3

13. 某学校数学兴趣小组有 10 名学生, 其中有 4 名女学生, 现从中抽取 3 名学生参加科技节活动.

(1) 求抽取的学生中恰有 1 名女学生的概率.

(2) 记 ξ 表示抽取的 3 名学生中男学生数, 求 ξ 的分布列.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$.

(2) ξ 分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【解析】 (1) 从10名学生中抽取3名学生所有情况数为：

$$C_{10}^3 = 120,$$

其中恰有1名女学生的情况数为：

$$C_4^1 \cdot C_6^2 = 60,$$

$$\therefore P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

(2) ξ 所有可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(\xi = 0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

$\therefore \xi$ 分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【标注】 【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布；离散型随机变量的分布列

14. 在某年级的联欢会上设计一根摸奖游戏，在一个口袋中装有4个红球和4个白球，这些球除颜色外完全相同，一次从中摸出3个球， X 表示摸出红球的个数.

(1) 求 X 的分布列. (用数字作答)

(2) 至少摸到2个红球就中奖，求中奖的概率. (用数字作答)

【答案】 (1)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(2) $\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) X 的取值为0, 1, 2, 3,

设摸出 i 个红球的概率为 $P(X = i)$,

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{14},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_4^2}{C_8^3} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_4^1}{C_8^3} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{14}.$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(2) 中奖的概率为 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】超几何分布；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

15. 一个盒子里装有7张卡片，其中有红色卡片4张，编号分别为1, 2, 3, 4；白色卡片3张，编号分别为2, 3, 4. 从盒子中任取4张卡片（假设取到任何一张卡片的可能性相同）.

(1) 求取出的4张卡片中，含有编号为3的卡片的概率.

(2) 在取出的4张卡片中，红色卡片编号的最大值设为 X ，求随机变量 X 的分布列.

【答案】(1) $\frac{6}{7}$.

(2) 分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

【解析】(1) $P = \frac{C_2^1 C_5^3 + C_2^2 C_5^2}{C_7^4} = \frac{6}{7}$.

(2) X 可能取1, 2, 3, 4.

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}.$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}.$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_7^4} = \frac{2}{7}.$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^3}{C_7^4} = \frac{4}{7}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

【标注】【知识点】古典概型的概率计算（涉及计数原理）；离散型随机变量的分布列

练3

16. 某人参加一次英语口语考试，已知在备选的10道试题中，能答对其中的6道题，规定每次考试都从备选题中随机抽出3道题进行测试，求答对试题数 ξ 的概率分布。

【答案】 答对试题数 ξ 的概率分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【解析】 答对试题数 ξ 的可能取值为：0, 1, 2, 3四种情况。

$$P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}; P(\xi=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}; P(\xi=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2};$$

$$P(\xi=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}.$$

所以答对试题数 ξ 的概率分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的分布列

17. PM2.5是指悬浮在空气中的空气动力学当量直径小于或等于2.5微米的颗粒物，也称为可入肺颗粒物。根据现行国家标准GB3095—2012，PM2.5日均值在35微克/立方米以下，空气质量为一级；在35微克/立方米~75微克/立方米之间，空气质量为二级；在75微克/立方米以上，空气质量为超标。从某市2018年全年每天的PM2.5日均值监测数据中随机地抽取10天的数据作为样本，监测值频数如下表：

PM2.5日均值 (微克/立方米)	[25, 35]	(35, 45]	(45, 55]	(55, 65]	(65, 75]	(75, 85]
频数(天)	3	1	1	1	1	3

- (1) 从这10天的PM2.5日均值监数据中，随机抽出3天，求恰有1天空气质量达到一级的概率。
- (2) 从这10天的数据中任取3天数据，记 ξ 表示抽到PM2.5日均值监测数据超标的天数，求 ξ 的分布列。

【答案】(1) $\frac{21}{40}$.

(2)

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

【解析】(1) 记“从这10天的PM2.5日均值监测数据中，随机抽出3天，恰有1天空气质量达到一级”为事件A，

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}.$$

(2) ξ 的所有可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(\xi = k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} (k = 0, 1, 2, 3),$$

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{C_3^0 C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120},$$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布；离散型随机变量的分布列

18. 从甲地到乙地要经过3个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(1) 设 x 表示一辆车从甲地到乙地遇到 红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

(2) 若有2辆独立地从甲地到乙地，求这2车辆共遇到1个红灯的概率.

【答案】(1) 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = \frac{13}{12}.$$

(2) $\frac{11}{48}$.

【解析】(1)

设 x 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24},$$

∴分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{12}.$$

(2) 设 Y 表示第一辆车遇到红灯个数， Z 表示第二辆车遇到红灯个数，

$$\begin{aligned} \therefore P(Y+Z=1) &= P(Y=0, Z=1) + P(Y=1, Z=0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{11}{24} + \frac{11}{24} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{48}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的分布列

19. 已知盒中共有9个球，其中有4个红球、3个黄球和2个绿球，这些球除颜色外完全相同。

(1) 从盒中一次随机取出2个球，求取出的2个球颜色相同的概率。

(2) 从盒中一次随机取出4个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1, x_2, x_3 ，随机变量 X 表示 x_1, x_2, x_3 中的最大数，求 X 的概率分布。

(3) 从盒中一次随机取出4个球，随机变量 X 表示这四个球中相同颜色球的个数，求 X 的概率分布。

【答案】(1) $\frac{5}{18}$

(2) X 的概率分布为

X	2	3	4
P	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{1}{126}$

(3) X 的概率分布为

X	4	3	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{4}{7}$

【解析】(1)

一次取2个球共有 $C_9^2 = 36$ 种可能，2个球颜色相同共有 $C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 10$ 种可能情况，

$$\therefore \text{取出的2个球颜色相同的概率 } P = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

(2) X 的所有可能值为4, 3, 2,

$$\text{则 } P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_5^1 + C_3^3 \cdot C_6^1}{C_9^4} = \frac{13}{63},$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=3) - P(X=4) = \frac{11}{14},$$

$\therefore X$ 的概率分布为

X	2	3	4
P	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{1}{126}$

(3) X 的所有可能值为4, 3, 2,

$$\text{则 } P(X=4) = \frac{C_4^4 + C_4^2 C_3^2 + C_4^2 C_2^2 + C_3^2 C_2^2}{C_9^4} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_5^1 + C_3^3 C_6^1}{C_9^4} = \frac{13}{63},$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=4) - P(X=3) = \frac{4}{7},$$

$\therefore X$ 的概率分布为

X	4	3	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{4}{7}$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列；超几何分布；古典概型